Visite guidée d'IST

Nicolas Boulenguez*

avril 2016

La Théorie des Ensembles Internes (IST) formule les idées de l'analyse non standard comme un enrichissement des mathématiques existantes, sans modifier les objets ni leurs propriétés. Elle se prête mieux à une utilisation pratique que la présentation initiale de [Rob66]. L'article original [Nel77] et le livre non publié [Nel], disponibles en ligne et en anglais, la présentent avec brio mais dans des sections de difficulté très variable.

Cet article propose une sélection subjective, en espérant briser l'indifférence polie dont cette théorie fait généralement l'objet. [Rob85] poursuit le même objectif, sans doute avec succès puisque c'est lui qui m'a initié.

J'ai essayé de maintenir un aspect assez formel, basé sur des éléments de logique comme la contraposition ou la négation d'un quantificateur, mettant *a contrario* en valeur le seul résultat admis. Toutefois, le lecteur trouver certainement l'exposé plus digeste à partir de la section 3, dont les intuitions essentielles lui ont déjà été enseignées.

Le débutant tirera sans doute aussi profit de l'axiomatique réduite donnée par [Mey96] à des fins d'enseignement, qui suffit à justifier tous les calculs du lycée par des preuves d'une dimension raisonnable. Quiconque a coupé des ϵ en quatre devant des élèves normaux ces derniers temps comprendra l'intérêt potentiel, et jugera à son gré la solution proposée. Ce livre me semble accessible à un bac+2 scientifique non logicien motivé, autant dire à n'importe quel enseignant en mathématiques.

La grande absente de cette sélection est la théorie des probabilités. Il aurait été difficile de se comparer à [Nel87], disponible en ligne en français.

Ce texte n'aurait jamais pu voir le jour si je n'avais eu la même chance au préalable. Merci maman. Merci de leurs contributions à Christophe Caignaert, Henri Brunin, Jean-Paul Bonnet, Robert Gergondey, Robert Lutz, Roland Ven, Rémi Goblot, et aux auteurs de la bibliographie, que je n'ai fait que plagier.

*nicolas.boulenguez@free.fr

1 Préliminaires

Peu enthousiasmants mais nécessaires, et, espérons, sufffisants. Il s'agit pour l'essentiel d'une mise au point sur des aspects de ZFC oubliés dans la pratique quotidienne du mathématicien, tout à fait semblable a celle nécessaire sur la notion de fonction avant d'aborder la notion de surjection.

1.1 Notations

La factorielle $1 \times 2 \times \cdots \times (k-1) \times k$ d'un entier naturel k est notée $k!$, les parties réelle et imaginaire d'un complexe z respectivement par $\mathfrak{Re}\, z$ et $\mathfrak{Im}\, z$, son conjugué $\mathfrak{Re}\, z - i\,\mathfrak{Im}\, z$ par $\overline{z}$, le coefficient binômial généralisé $\frac{z(z-1)\cdots(z-k+2)(z-k+1)}{k!}$ par $\binom{z}{k}$. On utilisera les inégalités $|\mathfrak{Re}\, z| \leqslant |z|$ et $|\mathfrak{Im}\, z| \leqslant |z|$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, les notations $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ désignent les entiers définis par $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1$. Si x est entier, les deux sont égaux, sinon ils diffèrent de un.

Afin de distinguer visuellement les formules du corps de texte, la négation « non P » d'une formule sera notée par $\neg \mathrm{P}$, la conjonction « P et Q » par $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$, et la disjonction « P ou Q » par $\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$.

Conformément à l'usage courant, lorsque cela augmente la lisibilité, on emploiera les abrégés suivants et de nombreuses variantes.

$$
\begin{array}{ll}
(\forall x \in \mathrm{E} \quad \mathrm{P}) \iff (\forall x \quad x \in \mathrm{E} \implies \mathrm{P}) & (\exists x \in \mathrm{E} \quad \mathrm{P}) \iff (\exists x \quad x \in \mathrm{E} \wedge \mathrm{P}) \\
(\forall x > 0 \quad \mathrm{P}) \iff (\forall x \quad x \in \mathbb{R}_*^+ \implies \mathrm{P}) & (\exists x > 0 \quad \mathrm{P}) \iff (\exists x \quad x \in \mathbb{R}_*^+ \wedge \mathrm{P})
\end{array}
$$

Des manipulations aussi fastidieuses que triviales garantissent que ces notations n'introduisent aucune difficulté.

Ex. 1 — Soit $\mathrm{P}\colon \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant 2$. En explicitant dans le détail les abréviations ci-dessus, vérifier que la négation de P a la même valeur de vérité que $\exists n \in \mathbb{N} \quad n < 2$. La question n'est ni de savoir si P est fausse, ni si le bon sens suggère le même résultat.

1.2 Formules internes et externes

Un énoncé mathématique usuel peut toujours s'écrire comme une formule formée de symboles logiques comme $\exists, \forall, \ldots$ et de symboles plus spécialisés. Cette formule ne sert que comme référence purement théorique, dans la mesure où sa longueur devient très rapidement immense au point de décourager une écriture explicite.

L'usage veut qu'on imagine écrire ces formules dans la théorie des ensembles de Zermelo et Fraenkel avec axiome du Choix (ZFC), qui utilise des formules écrites avec le symbole $\in$. Bien qu'il se lise « appartient », et que, dans la mesure du possible, les axiomes décrivent une idée intuitive, aucun sens ne lui est attribué. Chaque théorème se ramène, en principe, à une formule ne contenant que le symbole $\in$, déduite par étapes à partir des axiomes.

Les symboles de tous les jours sont définis clairement par abréviation de formules. Par exemple, $A \subseteq E$ abrège la formule $\forall x \quad x \in A \implies x \in E$. On peut parfaitement définir le sens intuitif de $\subseteq$ une fois admis celui de $\in$: A est une partie de E ssi chaque élément de A appartient à E. De même, $A = B$ abrège la formule $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

La théorie IST ajoute un second symbole non défini $^{\mathrm{ac}}$. À la différence de $\in$, qui s'écrit entre deux variables ($x \in E$), le symbole $^{\mathrm{ac}}$ s'applique sur une seule variable : (x^{ac}), ce qui se lit « x est accessible ».

Insistons, $^{\mathrm{ac}}$, quelque soit son sens intuitif, n'a pas de « définition » au sens usuel, c'est-à-dire qu'il n'abrège aucune formule plus longue. En dehors des connecteurs logiques, seul le symbole $\in$ possède ce statut. Si ZFC était comparée à une pellicule noir et blanc, qui permet de décrire de nombreux objets à l'aide de la notion élémentaire de degré de luminosité, l'ajout du nouveau prédicat correspondrait au passage à la couleur. Il permet de décrire de nouvelles nuances, cohérentes avec les précédentes mais ne s'y ramenant pas.

Définition. Une formule est dite *interne* à ZFC lorsqu'elle contient seulement le symbole $\in$ et *externe* à ZFC lorsqu'elle contient aussi le symbole $^{\mathrm{ac}}$.

Par exemple, l'énoncé « tout premier est pair » est un abrégé pour la formule

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad (p \text{ est premier}) \implies (\exists d \in \mathbb{N} \quad p = 2d),$$

dans laquelle chaque abréviation peut théoriquement se ramener à une sous-formule ne contenant que les symboles élémentaires de ZFC. La première étape serait de remplacer la sous-formule (p est premier) par

$$(p > 1) \wedge (\forall d \in \mathbb{N} \quad \forall d' \in \mathbb{N} \quad p = d \times d' \implies ((d = 1) \vee (d' = 1)))$$

Ensuite, il faudrait remplacer les symboles $>, \times, \mathbb{N}, 1$ par leurs définitions. Personne ne le fait explicitement, mais c'est en théorie possible, et la formule complète traduisant l'énoncé intuitif n'utilise que le symbole $\in$. Elle est donc interne à ZFC et à IST.

L'énoncé « tout premier est accessible » abrège une formule comme

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad (p \text{ est premier}) \implies ({}^{\mathrm{ac}} p)$$

Cette formule, contenant le symbole $^{\mathrm{ac}}$, est externe à ZFC.

L'énoncé « tout premier est mon ami » est externe à ZFC et IST, il fait référence à une notion qui n'est pas un abrégé pour une formule contenant les symboles $\in$ ou $^{\mathrm{ac}}$.

Ex. 2 — La formule P : $(x^{\mathrm{ac}} \implies x > 3) \wedge (x > 1)$ est externe, puisqu'elle contient le symbole $^{\mathrm{ac}}$. Donner une formule interne à ZFC et prenant la même valeur de vérité pour chaque valeur de la variable x.

1.3 Limites de l'axiome de séparation

Dans ZFC, l'axiome de séparation traduit l'idée qu'il est possible de grouper en ensembles les objets ayant une propriété P donnée et ceux qui ne l'ont pas.

Axiome 1.1 (Séparation). $\forall \mathrm{E} \quad \exists \mathrm{A} \quad \forall x \quad x \in \mathrm{A} \iff (x \in \mathrm{E}) \wedge \mathrm{P}$

La partie A ainsi construite à partir de l'ensemble ambiant E et de l'équation P contient, parmi les éléments de E, les solutions de P et seulement elles. Cela le définit uniquement, puisque deux ensembles ayant les mêmes éléments sont égaux. On le note $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \quad \mathrm{P}\}$.

1.3.1 La séparation nécessite un ensemble ambiant

Déjà dans le cadre de ZFC, l'axiome 1.1 soulève des difficultés. La formulation $\exists \mathrm{A} \quad \forall x \quad x \in \mathrm{A} \iff \mathrm{P}$, plus intuitive mais trop libérale, a été délibérément évitée par les concepteurs de ZFC de manière à ne pas permettre de former certains ensembles qui amèneraient une contradiction.

Rien de plus naturel par exemple que l'ensemble de tous les ensembles, c'est-à-dire $\{x \quad x = x\}$. Malheureusement, un tel ensemble n'existe pas.

Théorème 1.2. *Aucun ensemble* E *ne vérifie* $\forall x \quad x \in \mathrm{E} \iff x = x$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'un tel E soit disponible. Grâce à l'axiome 1.1, il serait possible de former l'ensemble $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \quad x \notin x\}$. La proposition $\mathrm{A} \in \mathrm{A}$ s'avèrerait alors équivalente à sa propre négation. □

Sans ensemble ambiant, l'axiome 1.1 ne s'applique pas. Il se peut qu'il existe tout de même, pour d'autres raisons, un A tel que $\forall x \quad x \in \mathrm{A} \iff \mathrm{P}$. Par exemple, si P est la formule $x \neq x$, l'ensemble vide convient.

Ex. 3 — L'ensemble des parties définit-il une application $\mathcal{P} : \mathrm{E} \mapsto \mathcal{P}(\mathrm{E})$ qui à chaque ensemble E associe l'ensemble de ses parties ?

1.3.2 La séparation nécessite une propriété interne

Il serait plus précis de parler de schéma d'axiomes à propos de 1.1. En effet, chaque propriété P formulable dans ZFC permet d'écrire un nouvel axiome. Il s'agit en fait d'une collection infinie d'axiomes.

Le nouveau symbole introduit par IST permet d'écrire de nouvelles formules, mais, aucun nouvel axiome n'ayant été introduit pour l'instant, rien ne permet de croire que l'axiome 1.1 s'applique aussi aux nouvelles formules. Par exemple, rien ne garantit l'existence d'un A vérifiant $\forall x \in \mathbb{N} \quad x \in A \iff x^{\mathrm{ac}}$.

Le simple fait d'écrire $A = \{x \in E \quad x^{\mathrm{ac}}\}$ constitue déjà une erreur de raisonnement, au même titre que $A = \{x \in E \quad x$ est bleu avec un bonnet blanc$\}$ qui utilise lui aussi une propriété externe à ZFC.

Il peut exister, pour d'autres raisons, un A tel que $\forall x \quad x \in A \iff P$. Par exemple, si P est la formule $(x^{\mathrm{ac}}) \wedge (x \neq x)$, l'ensemble vide convient.

1.3.3 La récurrence nécessite une propriété interne

La construction usuelle de $\mathbb{N}$ assure que toute partie non vide possède un plus petit élément, ce qui est à la base du célèbre

Théorème 1.3 (Principe de récurrence). *Une partie* E *de* $\mathbb{N}$ *contenant* 0 *et telle que* $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \in E \implies n+1 \in E$ *est nécessairement* $\mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons par l'absurde le complémentaire de E non vide.

Il possède alors un minimum m, qui ne peut être nul puisque $0 \in E$. Son prédecesseur $m-1$ est dans E, sinon m ne serait pas minimal. La seconde hypothèse impose $m \in E$, ce qui contredit la définition de m. □

On obtient la formulation enseignée en lycée (une propriété vérifiée par 0 et telle que si n la vérifie, alors $n+1$ aussi est nécessairement vérifiée par tous les entiers naturels) en appliquant ce théorème à l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} \quad P\}$. La formation de cet ensemble utilise l'axiome de séparation 1.1, qui n'est valable que pour une propriété interne.

Il est tout-à-fait possible par exemple que 0 soit accessible, que le successeur de tout entier naturel accessible soit accessible, et qu'il y ait pourtant un entier naturel inaccessible. Peut-être cette citation abrégée de [Del95] apportera un peu de réconfort : « Je sais construire un mur de trois briques, je sais ajouter une brique à un mur, et pourtant il y a des hauteurs qu'un mur ne peut atteindre ». Autre comparaison heureuse, l'enfant d'un singe est un singe, pourtant certains descendants de singes n'en sont plus tout-à-fait. Aucune de ces notions ne s'exprimant de manière interne à ZFC, aucune n'a de raison de définir un ensemble.

2 Axiomatique réduite d'IST

La notion « x^{ac} » n'a aucune définition dans ZFC, et les énoncés externes, en particuliers les axiomes d'IST, n'ont ni de preuve, ni même de sens dans ZFC.

Pour l'instant, aucun axiome ne précise l'usage du nouveau symbole, et rien n'empêche les ensembles d'être tous accessibles, tous inaccessibles, ou n'importe quelle situation intermédiaire. Trois axiomes, introduits progressivement, définiront les règles de manipulation du nouveau symbole, et le relieront aux mathématiques internes.

2.1 IST ne crée aucune contradiction nouvelle

Il est alors sain de craindre que l'ajout d'axiomes arbitraires n'introduise une contradiction. Chacun a appris dans son jeune temps qu'ajouter la règle de calcul $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ aux tables de la loi mathématique amène des absurdités, et que même EULER, s'est trompé à force d'inventer des règles de convergence *ad hoc* pour chaque série.

Qu'on se rassure, les axiomes ont été choisis avec soin de façon qu'un énoncé interne démontrable dans IST le soit aussi dans ZFC. La preuve constitue l'appendice 8 de [Nel77]. Elle relève d'une logique formelle dont la complexité dépasse l'ambition de cet article.

Il s'ensuit que les trois axiomes d'IST n'introduisent aucune contradiction. En effet, s'il existe une preuve valide que $0 = 1$ au sein d'IST, on peut en exhiber une dans ZFC. Rappelons au lecteur qui s'attendrait au mode conditionnel dans la phrase précédente que rien ne garantit à ce jour l'impossibilité d'une démonstration que $0 = 1$ dans ZFC. On se contente de faire des mathématiques dans des cadres *aussi cohérents* que ZFC. Si jamais un problème se manifeste, on retouchera les axiomes de ZFC, et cela s'est déjà produit.

Il peut décevoir qu'IST n'apporte aucun résultat nouveau. Cet article aspire à illustrer qu'elle raccourcit dans certains cas le chemin de l'intuition d'une démonstration à son exposé rigoureux. Les δ, ϵ de WEIERSTRASS proposent un autre chemin, adapté par exemple au calcul explicite d'erreur, ou pour traduire une dynamique itérative.

2.2 Axiome de transfert

Cet axiome d'IST, valable pour une propriété P interne ne faisant apparaître que les variables $t_1, \cdots, t_n, x$, s'énonce ainsi.

$$\forall {t_1}^{\mathrm{ac}} \cdots \forall {t_n}^{\mathrm{ac}} \quad \forall x^{\mathrm{ac}} \quad \mathrm{P}(t_1, \cdots, t_n, x) \Longrightarrow \forall x \quad \mathrm{P}(t_1, \cdots, t_n, x)$$

Il conduit immédiatement à deux formulations d'usage très fréquent.

Théorème 2.1. *Soit* P *une propriété* interne *à paramètres* accessibles.

Pour prouver la conjecture $\forall x \quad \mathrm{P}$, *on peut supposer x accessible.*

$$\forall x^{ac} \quad \mathrm{P} \Longleftrightarrow \forall x \quad \mathrm{P} \tag{$\mathrm{T}_\forall$}$$

Si l'équation P *possède une solution x, on peut choisir x accessible.*

$$\exists x \quad \mathrm{P} \iff \exists x^{ac} \quad \mathrm{P} \tag{$T_\exists$}$$

Démonstration. Le sens direct de ($T_\forall$) ne fait que reformuler l'axiome plus lisiblement. L'implication réciproque est triviale : si une propriété est toujours vérifiée, alors elle l'est en particulier par les accessibles.

Dans ($T_\forall$), remplaçons P par sa négation, elle aussi interne à paramètres accessibles. Si P est fausse pour tout accessible, alors elle est fausse pour tout le monde. En contraposant, une propriété vérifiée au moins une fois est vérifiée par au moins un accessible. □

Ex. 4 —
1. Un ensemble accessible non vide contient un accessible.
2. Si i est inaccessible, alors l'ensemble $\{i\}$ est inaccessible.
3. Soit A une partie accessible d'un ensemble accessible E. Si A contient tous les éléments accessibles de E, alors A = E tout entier.

Ex. 5 — Existe-t-il un entier pair accessible ?

Théorème 2.2. *Un ensemble accessible est caractérisé par ses éléments accessibles.*

Démonstration. Soient E, F deux ensembles accessibles contenant exactement les mêmes éléments accessibles. Alors la formule $x \in \mathrm{E} \iff x \in \mathrm{F}$ est vérifiée par tout accessible. ($T_\forall$) garantit qu'elle est vérifiée par tout x inconditionnellement, ce qui signifie que E = F. □

2.3 Les accessibles sont nombreux

Ex. 6 —
1. Considérons la formule $\mathrm{P(V)} = \forall x \quad x \notin \mathrm{V}$ (« V est vide »).
   a) Que déduire de $\exists \mathrm{V} \quad \mathrm{P(V)}$ (« existence d'un vide ») à l'aide de ($T_\exists$) ?
   b) De $\forall \mathrm{V}, \mathrm{V}' \quad \mathrm{P(V)} \wedge \mathrm{P(V')} \implies \mathrm{V} = \mathrm{V}'$ (« unicité du vide ») ?
2. Soit E accessible, considérons la formule $\mathrm{P}(\mathcal{P}) = \forall \mathrm{A} \quad \mathrm{A} \subseteq \mathrm{E} \iff \mathrm{A} \in \mathcal{P}$ (« $\mathcal{P}$ est l'ensemble des parties de E »).
   a) Que déduire de $\exists \mathcal{P} \quad \mathrm{P}(\mathcal{P})$ (« existence d'un ensemble des parties ») ?
   b) De $\forall \mathcal{P}, \mathcal{P}' \quad \mathrm{P}(\mathcal{P}) \wedge \mathrm{P}(\mathcal{P}') \implies \mathcal{P} = \mathcal{P}'$ (« unicité de l'ensemble des parties ») ?

L'expression « par transfert » résume souvent une succession d'applications de ($T_\forall$) et ($T_\exists$) similaire au procédé illustré par les exercices précédents. En voici un résumé informel.

Théorème 2.3. *Un ensemble défini de manière unique par des formules internes, éventuellement à partir de paramètres accessibles, est nécessairement accessible.*

Ainsi 0, 1, 2, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, π, la fonction exponentielle sont accessibles. L'image d'un accessible par une application accessible est accessible. Par exemple, l'exponentielle d'un réel accessible est aussi accessible. De même, le successeur d'un un entier naturel accessible l'est aussi. Il est tentant mais erroné d'en déduire que tous entier naturel est accessible, voir la partie 1.3.3.

Ex. 7 — La somme de deux entiers naturels accessibles est-elle accessible ?

Ex. 8 — Soit $k \in \mathbb{N}$ accessible. L'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à k existe-t-il ? est-il fini ? accessible ? Même question pour k inaccessible.

Ex. 9 — Est-il possible de prouver l'existence d'un entier accessible ? du plus petit entier accessible ? Mêmes questions pour « inaccessible ».

2.4 Entiers naturels accessibles et inaccessibles

Théorème 2.4. *Un ensemble est accessible fini ssi chaque élément est accessible.*

Admettons ce résultat, qui sera ramené dans la section 10 à un dernier axiome plus général. Il suffira pour toute la partie numérique, et pour donner enfin des exemples plus substantiels.

— $\{0, 1\}$ est fini, accessible, et ne contient que des accessibles.
— $\mathbb{N}$ est infini, accessible, et contient l'accessible 0. D'après le théorème, il contient au moins un inaccessible n.
— $\{n\}$ est fini de cardinal 1, inaccessible sinon son unique élément n serait accessible par transfert. Il ne contient que des inaccessibles.
— $\{k \in \mathbb{N} \quad 1 \leqslant k \leqslant n\}$ est bien formé par une propriété interne, fini de cardinal n, inaccessible sinon son cardinal serait accessible par transfert. Il contient l'accessible 1 et l'inaccessible n.

Théorème 2.5. *Soient $k \leqslant n$ deux entiers naturels.*
— *Si n est accessible, alors k aussi.*
— *Si k est inaccessible, alors n aussi.*

Démonstration. Le second énoncé est la contraposée du premier, il suffit de prouver celui-ci. L'ensemble $E = \{k \in \mathbb{N} \quad k \leqslant n\}$ est correctement formé à l'aide de la propriété interne $k \leqslant n$, et fini de cardinal $n + 1$. Quand n est accessible, E aussi par transfert. D'après le théorème 2.4, chaque élément k est accessible. □

Par exemple, il existe un nombre premier inaccessible. En effet, choisissons un n inaccessible. Euclide a montré qu'il existait un premier $p \geqslant n$, lequel est nécessairement inaccessible.

Ex. 10 — Dans $\mathbb{N}^*$, citer un multiple commun à tous les accessibles.

Ex. 11 — Citer trois parties de $\mathbb{N}$ contenant tous les entiers naturels accessibles. Lesquelles sont accessibles ?

On est confronté à ce stade à une situation troublante. Chaque entier naturel accessible est plus petit que chaque entier inaccessible, mais il est impossible de situer précisément la frontière, du moins pas par application de l'axiome de séparation 1.1 à la propriété externe n^{ac}. L'ensemble désiré pourrait exister pour d'autres raisons, mais le théorème suivant tranche la question.

Théorème 2.6. *Aucun ensemble* E *ne vérifie* $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \in \mathrm{E} \iff n^{\mathrm{ac}}$.

Démonstration. Un tel ensemble contiendrait tous les entiers naturels d'après le principe de récurrence 1.3. Ce n'est pas le cas d'après le théorème 2.4. □

Ex. 12 — Existe-t-il un ensemble des entiers naturels inaccessibles ? un plus petit entier naturel inaccessible ?

2.5 Axiome de standardisation

Cet axiome s'applique à une propriété quelconque : interne ou externe, avec des paramètres accessibles ou pas.

$$\forall \mathrm{E}^{\mathrm{ac}} \quad \exists \mathrm{A}^{\mathrm{ac}} \quad \forall x^{\mathrm{ac}} \quad x \in \mathrm{A} \iff (x \in \mathrm{E}) \wedge \mathrm{P} \tag{S}$$

Il énonce qu'on peut former une partie A de E dont les éléments accessibles sont exactement les éléments accessibles de E vérifiant le critère P. L'ensemble accessible A construit par (S) est uniquement défini par ses éléments accessibles d'après le théorème 2.2. On le note $\mathrm{A} = {}^{\mathrm{S}}\{x \in \mathrm{E} \quad \mathrm{P}\}$.

Attention : *on ignore tout des x inaccessibles*. Certains peuvent vérifier P hors de A, ou la falsifier dans A.

Exemple. Soit $\mathrm{A} = {}^{\mathrm{S}}\{n \in \mathbb{N} \quad n^{\mathrm{ac}}\}$. Pour n accessible, le critère d'appartenance à A écrit entre les accolades s'applique, et $n \in \mathrm{A} \iff n^{\mathrm{ac}}$, propriété toujours vraie. Tous les entiers accessibles sont dans A. D'après le théorème 2.2, $\mathrm{A} = \mathbb{N}$. La formation de A embarque des clandestins inaccessibles.

Ex. 13 —
1. Soit P la propriété $\exists k \in \mathbb{N} \quad n = 2k$, qui pour n entier naturel signifie « n est pair ». Comparer les ensembles $\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{P}\}$ et $\mathrm{B} = {}^{\mathrm{S}}\{n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{P}\}$.
2. Même question pour $\mathrm{P} = \neg n^{\mathrm{ac}}$ (« n est inaccessible »).
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Mêmes questions pour $\mathrm{P} = n < k$.

Théorème 2.7. *Une propriété,* même externe ou à paramètres inaccessibles, *vérifiée par* 0 *et telle que si n accessible la vérifie, alors* $n+1$ *aussi, est nécessairement vérifiée par tous les entiers naturels accessibles.*

Démonstration. Notons P la propriété et $E = {}^{S}\{n \in \mathbb{N} \quad P\}$. L'hypothèse se traduit par $\forall n^{ac} \in \mathbb{N} \quad n \in E \implies n+1 \in E$, et s'étend aux inaccessibles d'après ($T_\forall$). D'après le théorème 1.3, $E = \mathbb{N}$ tout entier, il contient tous les naturels accessibles. Il contient les autres aussi, mais le critère P ne s'applique pas à eux. □

3 Analyse en termes d'ordre de grandeur

Sauf mention explicite, les nombres manipulés appartiennent à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le lecteur gardera à l'esprit que les idées de cette partie sont présentées sous une forme numérique, même s'il a, comme l'auteur, forgé son intuition avec le vocabulaire des suites ou des fonctions.

3.1 Nombre modéré

Définition. Un nombre x est *modéré* lorsque $\exists a^{ac} \in \mathbb{N} \quad |x| \leqslant a$.

Par exemple, 0, 1, $2+i$, -3.14 sont modérés, puisqu'ils vérifient $|x| \leqslant 4$.

Théorème 3.1. *Un accessible est nécessairement modéré.*

Démonstration. Le naturel qui figure dans le membre de droite de l'inégalité triviale $|x| \leqslant \lceil |x| \rceil$ est accessible par transfert dès que x l'est. □

Pour les entiers, la réciproque est valable, autrement dit la modération coïncide avec l'accessibilité. En effet, s'il existe un naturel accessible a tel que $|x| \leqslant a$, le théorème 2.5 indique que $|x|$ est accessible, donc $x = \pm|x|$ aussi par transfert.

Les deux notions diffèrent dès qu'on quitte les entiers. Par exemple, l'inverse d'un naturel inaccessible n est modéré car $|1/n| \leqslant 1$, mais inaccessible sinon son inverse n serait accessible par transfert.

Ex. 14 — Trouver un réel inaccessible modéré entre 2 et 3.

Ex. 15 — Dans $\mathbb{R}$, être modéré équivaut à être encadré par deux accessibles.

Un nombre est immodéré lorsque son module dépasse strictement tout entier naturel accessible. Par exemple, si n est un naturel inaccessible, alors n, $-n$ et in sont immodérés.

Le lien entre l'ordre des réels positifs et la modération rappelle celui entre l'ordre des entiers naturels et l'accessibilité.

Théorème 3.2. *Si $|x| \leqslant |y|$ et si y est modéré, alors x est modéré.*

Si $|x| \leqslant |y|$ et si x est immodéré, alors y est immodéré.

Si x immodéré et si y est modéré, alors $|y| < |x|$.

Démonstration. Les trois formulations sont contraposées deux à deux, la première dit que les inégalités $|x| \leqslant |y|$ et $|y| \leqslant a$ entraînent $|x| \leqslant a$. □

Remarque. Ainsi, le long de l'axe réel, se découpent trois zones aux frontières floues, de gauche à droite : les immodérés négatifs ; les modérés ; puis les immodérés positifs. Dans le plan complexe, les immodérés sont tous loin de l'origine.

Par exemple, les inégalités $|\Re z| \leqslant |z|$ et $|\Im z| \leqslant |z|$ montrent qu'un complexe modéré a des parties réelle et imaginaire modérées. La réciproque découlera simplement des règles sur les opérations puisque $z = \Re z + i\Im z$.

Ex. 16 — Trouver un immodéré positif non entier.

Théorème 3.3. *La somme d'un nombre accessible de modérés l'est aussi.*
Le produit d'un nombre accessible de modérés l'est aussi.
Une somme (non vide) de termes immodérés de même signe l'est aussi.
Un produit (non vide) de facteurs immodérés l'est aussi.
La somme d'un modéré et d'un immodéré est immodérée.

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \cdots x_n$ des nombres.

Si n est accessible et les x_i modérés, notons $|x_k| = \max\{|x_i| \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}$, puis a un naturel accessible tel que $|x_k| \leqslant a$. Alors :

— $|\sum x_i| \leqslant \sum |x_i| \leqslant n|x_k|$ se ramène à un produit de deux modérés ;

— $|\prod x_i| = \prod |x_i| \leqslant |x_k|^n \leqslant a^n$, naturel, et accessible par transfert.

Si $n > 0$ et les x_i modérés, alors $|\prod x_i| = \prod |x_i| \geqslant |x_1|$ est immodéré. Le même raisonnement s'applique à une somme de termes de même signe.

Si a et $a + b$ sont modérés, alors $b = (a + b) + (-1) \times a$ aussi. Contraposer. □

Ex. 17 — Appliquer systématiquement le théorème précédent.

1. Une puissance naturelle accessible d'un modéré est modérée.
2. Si $\Re z$ et $\Im z$ sont modérés, alors z aussi.
3. L'opposé et le conjugué d'un modéré le sont aussi.
4. L'opposé et le conjugué d'un immodéré le sont aussi.
5. Dans $\mathbb{R}$, modéré + immodéré positif = immodéré positif.

Ex. 18 — Donner une preuve alternative du fait qu'une somme accessible de modérés l'est aussi, basée sur une récurrence accessible (théorème 2.7).

Ex. 19 — Les modérés forment-ils un sous-anneau de $\mathbb{Q}$?

3.2 Nombre très proche de zéro

Définition. Un nombre est *très proche de zéro* lorsqu'il est nul ou d'inverse immodéré. On note $x \simeq 0$.

Trivialement, $0 \simeq 0$. Soit n un naturel inaccessible, $\frac{1}{n} \simeq 0$. Un nombre n'est pas très proche de zéro lorsqu'il n'est pas nul et son inverse est modéré. Par exemple, $0.25 \not\simeq 0$.

Ex. 20 —
1. Zéro est le seul accessible très proche de 0.
2. Décrire ${}^{S}\{x \in \mathbb{C} \quad x \simeq 0\}$.

Ex. 21 —
1. Un très proche de zéro est modéré.
2. L'opposé, le conjugué, le module d'un $\simeq 0$ le sont aussi.

Théorème 3.4. *Si $|y| \leqslant |x|$ et $y \not\simeq 0$, alors $x \not\simeq 0$.*
Si $|y| \leqslant |x|$ et $x \simeq 0$, alors $y \simeq 0$.
Si $x \simeq 0$ et $y \not\simeq 0$, alors $|x| < |y|$.

Démonstration. Il ne s'agit que d'une reformulation du théorème sur les modérés appliqué aux inverses de x et y, sauf dans les cas triviaux où l'un est nul. □

Sur la demi-droite réelle positive, on rencontre de gauche à droite : 0 ; les $\simeq 0$ non nuls inaccessibles ; les $\not\simeq 0$ modérés, accessibles ou non ; puis les $\not\simeq 0$ immodérés inaccessibles. Dans le plan complexe, les très proches de zéro forment un halo autour de l'origine.

Le critère lié à l'ordre réel s'avère plus pratique que la définition.

Théorème 3.5. $x \simeq 0 \iff \forall a^{ac} \in \mathbb{R}_+^* \quad |x| < a$

Démonstration. Le résultat est évident pour $x = 0$, écartons cette valeur.

Soient $x \simeq 0$ et $a > 0$ accessible. Alors $1/x$ est immodéré et $\lceil 1/a \rceil$ un naturel accessible, donc $1/a \leqslant \lceil 1/a \rceil < |1/x|$, d'où l'inégalité voulue.

Réciproquement, supposons $|x| <$ à tout $a^{\mathrm{ac}} \in \mathbb{R}_+^*$, alors $n|x| < 1$ pour n accessible, même nul. Donc $1/x$ est immodéré et $x \simeq 0$. □

Peu de règles de calcul sont mises en avant, les autres seront énoncées de manière plus générale à la section suivante.

Théorème 3.6. *Le produit d'un immodéré par un $\not\simeq 0$ est immodéré.*
Le produit d'un $\simeq 0$ par un modéré est $\simeq 0$.

Démonstration. On passe d'un énoncé à l'autre en remplaçant les nombres par leurs inverses, après avoir écarté les cas de nullité. Montrons le premier.

Par contraposition, supposons $y \not\simeq 0$ modéré et xy modéré, montrons que x est modéré. Comme $y \not\simeq 0$, son inverse $1/y$ est modéré, disons que $|1/y| \leqslant a$. Par suite, $|x| = a|x|\frac{1}{a} \leqslant a|xy|$, produit de modérés. □

Ex. 22 — 1. Montrer que la somme de deux $\simeq 0$ l'est aussi.

2. Par récurrence, généraliser à une somme contenant un nombre accessible de termes tous $\simeq 0$.
3. Retrouver ce résultat en considérant un maximum.
4. Montrer que le produit d'un nombre accessible de facteurs $\not\simeq 0$ ne l'est pas non plus : en passant aux inverses ;
5. à l'aide d'inégalités réelles ;
6. par récurrence.

3.3 Nombres très proches et règles de calcul

Généralisons, on notera $x \simeq x'$ lorsque $x - x' \simeq 0$. Par exemple, $\frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} \simeq 2$ si n est un naturel inaccessible.

Écrire $x = x' + \epsilon$ avec $\epsilon \simeq 0$ permettra souvent un raisonnement plus direct que la manipulation d'une différence. Désormais, la lettre ϵ et ses variantes désigneront toujours des nombres très proche de 0, même si ce n'est pas précisé.

Théorème 3.7. *(i) La relation $\simeq$ est réflexive, symétrique, transitive.*

(ii) Deux accessibles très proches sont égaux.

(iii) Un nombre très proche d'un modéré est modéré.

Démonstration. (i) $x - x = 0 \simeq 0$ donc $x \simeq x$.

Supposons $x - y \simeq 0$. Alors $y - x = -(x - y) \simeq 0$ comme opposé d'un $\simeq 0$.

Si $x = y + \epsilon$ et $y = z + \epsilon'$, alors $x = z + (\epsilon + \epsilon')$. Comme $\epsilon + \epsilon' \simeq 0$, $x \simeq z$.

(ii) Si $a_1 \simeq a_2$, la différence est $\simeq 0$. S'ils sont accessibles, leur différence aussi. Le seul accessible $\simeq 0$ est 0.

(iii) Si $x = m + \epsilon$ avec $|m| \leqslant a^{\mathrm{ac}}$ et $\epsilon \simeq 0$, alors $|x| \leqslant |m| + |\epsilon| \leqslant a + 1$. □

Théorème 3.8. *(i) Si $x' \simeq x$, alors $|x'| \simeq |x|$.*

(ii) Si $x' \simeq x$ et $y' \simeq y$, alors $x' + y' \simeq x + y$.

(iii) Si $x' \simeq x$ et $y' \simeq y$ et x, y sont modérés, alors $x'y' \simeq xy$.

(iv) Si $x' \simeq x$ et $x \not\simeq 0$, alors $1/x' \simeq 1/x$.

Le théorème 2.7 étend les résultats sur la somme et le produit à un nombre accessible de termes ou de facteurs.

Ex. 23 — Démontrer le théorème précédent, en utilisant de la partie précédente que la somme, l'opposé et un multiple modéré d'un $\simeq 0$ sont $\simeq 0$.

Ex. 24 — Appliquer systématiquement le théorème précédent.

1. Si $x \simeq x'$, alors $-x \simeq -x'$.
2. Si $z \simeq z'$, alors $\overline{z} \simeq \overline{z'}$.
3. $\mathfrak{Re}\, z \simeq \mathfrak{Re}\, z' \wedge \mathfrak{Im}\, z \simeq \mathfrak{Im}\, z' \iff z \simeq z'$

Ex. 25 — La relation $\simeq$ est-elle une relation d'équivalence ? Que dire de la relation définie par le graphe ${}^{S}\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \quad x \simeq y\}$?

Terminons par un résultat souvent pratique, plus précis que le très fréquent « deux accessibles très proches sont égaux ».

Lemme 3.9. *Dans $\mathbb{R}$, si a, a' sont accessibles et $a \simeq x \leqslant x' \simeq a'$, alors $a \leqslant a'$.*

Démonstration. Soient a, a' accessibles, $x \simeq a$ et $x' \simeq a'$. Alors $x - x' \simeq a - a'$, ce qu'on peut écrire $x - x' = (a - a') + \epsilon$.

Supposons par contraposition que $a' < a$ et montrons que $x' < x$. Le nombre $a - a'$ est accessible non nul, donc $\not\simeq 0$. En particulier, sa valeur absolue est plus grande que celle de ϵ, et leur somme $x - x'$ est du signe de $a - a'$. □

3.4 Quelques indéterminations classiques

Considérons un polynôme $\sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ de degré n accessible et à coefficients modérés, par exemple un polynôme accessible. Ses valeurs en deux modérés très proches sont très proches. Une approximation en un x immodéré est donnée par la forme $x^n \sum_{k=0}^{n} p_k x^{k-n}$ et les règles de calcul sur les ordres de grandeur.

Soient z de module > 1 mais pas très proche de 1, $k \in \mathbb{N}$ accessible, et $n \in \mathbb{N}$ inaccessible. Choisissons un accessible $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $1 < 1 + a \leqslant |z|$.

$$|z^n| \geqslant (1+a)^n = \sum_{k'=0}^{n} \binom{n}{k'} a^{k'} \geqslant \binom{n}{k} a^k$$

$$\left|\frac{z^n}{n^k}\right| \geqslant \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-2}{n}\right)\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} a^k$$

Le membre de droite, très proche de l'accessible $\simeq \frac{a^k}{k!}$, ne l'est pas de zéro. En appliquant à $k+1$ au lieu de k, on exprime $z^n/n^k = (z^n/n^{k+1})n$ comme produit d'un $\not\simeq 0$ et d'un immodéré, le révélant immodéré.

Soient z de module < 1 mais pas très proche de 1, et $n \in \mathbb{N}$ inaccessible. Le paragraphe précédent montre que $z^n = 1/(1/z)^n \simeq 0$. Le résultat persiste si $z = 0$.

Soient z modéré et $n \in \mathbb{N}$ inaccessible. Puisque z est modéré, choisissons un naturel m accessible tel que $|z| \leqslant m$.

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \frac{m^n}{n!} = \frac{m^m}{m!} \times \frac{m^{n-m}}{(m+1)(m+2)\cdots(n-1)n} \leqslant \frac{m^m}{m!}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{n-m}$$

La parenthèse, accessible > 1, ne peut en être très proche, donc la puissance $\simeq 0$ et $z^n/n!$ aussi.

Pour $n \in \mathbb{N}$ inaccessible, $\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \cdots \frac{n}{n} \leqslant \frac{1}{n} \simeq 0$.

3.5 Partie accessible d'un réel

Lorsqu'un nombre x est très proche d'un accessible, cet accessible est uniquement déterminé par x. En effet, si $x \simeq a_1$ et $x \simeq a_2$, alors $a_1 \simeq a_2$ par transitivité, et deux accessibles très proches sont égaux.

Définition. Lorsqu'il existe, le nombre accessible très proche de x est appelé la *partie accessible* du nombre x.

Tout jusqu'ici s'appliquait aussi bien à $\mathbb{Q}$ qu'à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'exemple suivant montre que nous abordons une notion spécifique aux réels.

Exemple. Il existe des rationnels très proches de $x \simeq \sqrt{2}$, par exemple un développement décimal à un ordre inaccessible de $\sqrt{2}$. Un tel rationnel est très proche de $\sqrt{2}$ donc modéré. Sa partie accessible est $\sqrt{2}$, qui est irrationnel.

Le théorème suivant parle à sa manière de la continuité de $\mathbb{R}$. Il suffira pour montrer que les fermés bornés sont compacts, que toute suite de Cauchy converge, *etc*. Comme pour les résultats comparables, sa preuve nécessite de revenir à la construction du corps des réels.

Théorème 3.10. *Un complexe possède une partie accessible ss'il est modéré.*

Démonstration. D'après le théorème 3.7, un très proche d'un accessible, donc d'un modéré, est nécessairement modéré. Pour la réciproque, commençons par le cas d'un x réel. Par analogie avec la coupure de Dedekind correspondant à x, considérons la partie accessible $\mathrm{C} = {}^{\mathrm{S}}\{q \in \mathbb{Q} \quad q < x\}$. Deux cas sont possibles.

Soit C possède un maximum m, accessible comme C, montrons que $x \simeq m$. Soit $a > 0$ accessible quelconque. Par densité et $(\mathrm{T}_\exists)$, il existe un accessible $q \in \mathbb{Q}$ tel que $m < q < m + a$. Comme $m = \max \mathrm{C}$, $m \in \mathrm{C}$ et $q \notin \mathrm{C}$, donc $m < x \leqslant q < m + a$.

Soit C n'a pas de maximum, montrons qu'elle vérifie les autres conditions définissant une coupure. D'une part, la formule $\forall t_2 \in \mathrm{C} \quad \forall t_1 < t_2 \quad t_1 \in \mathrm{C}$, évidemment vérifiée pour des accessibles, reste valable en général d'après $(\mathrm{T}_\forall)$. D'autre part, comme x est modéré, $\lceil -a \rceil - 1 < -a \leqslant x \leqslant a \leqslant \lceil a \rceil$ pour un accessible a. Ainsi, C n'est ni vide, ni $\mathbb{Q}$ tout entier.

La partie C définit donc un réel accessible c, montrons que $x \simeq c$. Soit a accessible quelconque. Par densité et $(\mathrm{T}_\exists)$, il existe deux accessibles $q_\pm \in \mathbb{Q}$ tels que $c - a < q_- < c < q_+ < c + a$. Par définition de c, $q_- \in \mathrm{C}$ et $q_+ \notin \mathrm{C}$, donc $q_- < x \leqslant q_+$ et $c - a < x < c + a$.

Soit maintenant z un complexe modéré. Alors, $\mathfrak{Re}\, z$ et $\mathfrak{Im}\, z$ sont des réels modérés. Notons a, b leurs parties accessibles respectives, $z \simeq a + ib$. □

Ex. 26 — Donner un exemple de chacun des deux cas envisagés dans la preuve. Décrire C lorsque x est immodéré.

4 Définition externe d'une application

Dans ZFC, une application $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un graphe : $f \subseteq \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$. On exige de ce graphe les deux propriétés suivantes :

$$\begin{array}{llll} \forall x \in \mathrm{X} & \forall y, y' \in \mathrm{Y} & (x,y) \in f \wedge (x,y') \in f \implies y = y' & \text{au plus un } y \text{ par } x \\ \forall x \in \mathrm{X} & \exists y \in \mathrm{Y} & (x,y) \in f & \text{au moins un } y \text{ par } x \end{array}$$

L'image de x par f est alors l'unique y tel que $(x,y) \in f$.

Lorsqu'une propriété P interne, dépendant de x, y et traduisant souvent un calcul menant de x à y, est vérifiée par une unique valeur y de Y pour chaque x de X, on peut définir une application par $f = \{(x,y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \quad \mathrm{P}\}$.

L'axiome (S) permet un procédé similaire avec une propriété P externe ou à paramètres inaccessibles, tant que X, Y sont accessibles et qu'un seul y accessible vérifie P pour chaque x accessible.

Considérons l'ensemble accessible $f = {}^{\mathrm{S}}\{(x,y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \quad \mathrm{P}\}$. Par hypothèse, les deux formules ci-dessus sont vérifiées pour x, y, y' accessibles. Par transfert, f est une application. Pour les couples x, y accessibles, $(x,y) \in f \iff \mathrm{P}$, donc les x accessibles ont l'image voulue.

Ex. 27 — Soient $n \in \mathbb{N}$ inaccessible, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^n}{1+|x|^{n-1}}$ et $\mathrm{P} \iff y \simeq g(x)$.

1. Pour chaque x accessible, un et un seul accessible y vérifie P.

Ainsi, le procédé ci-dessus définit une application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Calculer les images par f de $0, 1, -1$.
3. Montrer que f a la même parité que n.
4. Calculer $f(x)$ pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.
5. Pour quels x a-t-on $f(x) = g(x)$? $f(x) \simeq g(x)$?

5 Construction de la fonction exponentielle

5.1 Étude d'un produit inaccessible

Choisissons une bonne fois pour le reste de cette partie un entier naturel inaccessible fixé n. Posons $\mathrm{e}(z) = \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$. Ceci définit une application e, vraisemblablement inaccessible.

Elle envoie 0 sur 1 et $-n$ sur 0. Lorsque z est complexe accessible, chaque facteur $1 + z/n \simeq 1$ est en particulier non nul, $\mathrm{e}(z)$ n'est pas nul. Lorsque x est accessible réel, chaque facteur est réel positif, $\mathrm{e}(x)$ est réel positif. Mieux, pour des accessibles réels, $\mathrm{e}(x)$ croît avec x.

Ex. 28 — Les questions sont indépendantes.

1. Développer $\mathrm{e}(1)$, puis utiliser $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour modérer $\mathrm{e}(1)$.
2. Factoriser $\mathrm{e}(z) - 1$, puis chaque terme de $\mathrm{e}(z) - 1 - z$.
3. En déduire l'inégalité $|\mathrm{e}(z) - 1 - z| \leqslant |z|^2\,\mathrm{e}(|z|)$.
4. Si $z \simeq 0$, alors $\mathrm{e}(z) \simeq 1$.
5. Si $y \in \mathbb{R}$ est accessible, alors $|\mathrm{e}(iy)| \simeq 1$.
6. Si $z, z' \in \mathbb{C}$ sont accessibles, alors $\mathrm{e}(z)\,\mathrm{e}(z')/\mathrm{e}(z + z') \simeq 1$.
   Il est tentant d'en conclure que $\mathrm{e}(z)\,\mathrm{e}(z') \simeq 1 \times \mathrm{e}(z + z')$, mais rien ne dit pour l'instant que $\mathrm{e}(z + z')$ est modéré.
7. Si k est naturel accessible, alors $\mathrm{e}(k)$ est modéré.
8. Si z est modéré, alors $\mathrm{e}(z)$ est modéré.

Ainsi, pour chaque z accessible, $\mathrm{e}(z)$, modéré, se trouve très proche d'exactement un Z accessible et $\exp = {}^{\mathrm{S}}\{(z, \mathrm{Z}) \in \mathbb{C}^2 \quad \mathrm{Z} \simeq \mathrm{e}(z)\}$ définit le graphe d'une application accessible : l'*exponentielle*. On sait seulement que, pour z accessible, $\exp z$ est accessible et très proche de $\mathrm{e}(z)$.

— $\exp 0 \simeq \mathrm{e}(0) = 1$ donc $\exp 0 = 1$.
— Pour x accessible réel, $\mathrm{e}(x) \in \mathbb{R}_+$, donc sa partie accessible $\exp x$ aussi.
— Pour $x < x'$ accessibles réels, $\mathrm{e}(x) < \mathrm{e}(x')$ donc $\exp x \leqslant \exp x'$.
— Pour z accessible, $|\mathrm{e}(z) - 1 - z| \leqslant |z|^2\,\mathrm{e}(z)$ donc $|\exp(z) - 1 - z| \leqslant |z|^2 \exp(|z|)$.
— Pour y accessible réel, $|\exp(iy)| \simeq |\mathrm{e}(iy)| \simeq 1$ donc $|\exp(iy)| = 1$.
— Pour z, z' accessibles, $\exp(z + z') \simeq \mathrm{e}(z + z') \simeq \mathrm{e}(z)\,\mathrm{e}(z') \simeq \exp z \exp z'$ donc $\exp(z + z') = \exp z \exp z'$.

Tous ces résultats s'étendent aux inaccessibles par transfert, puisque la fonction exponentielle est accessible. On enchaîne ensuite comme pour n'importe quelle autre construction.

5.2 Interprétation graphique

Pour un antécédent réel x, le produit $\mathrm{e}(x)$ est l'approximation donnée par la méthode d'Euler appliquée à l'équation différentielle $f' = f$ sur l'intervalle $[0, x]$ avec la condition initiale $f(0) = 1$, en utilisant un pas régulier $\frac{x}{n}$ (figure 1).

Pour un antécédent iy imaginaire pur, la même méthode conduit à une jolie interprétation graphique due à [Har89] (figure 2).

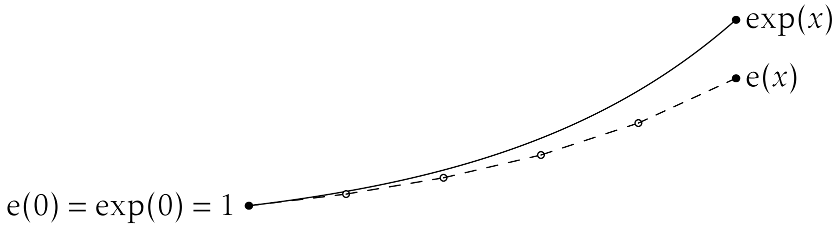


Figure 1 – Interprétation de $\mathrm{e}(x)$ pour x réel.

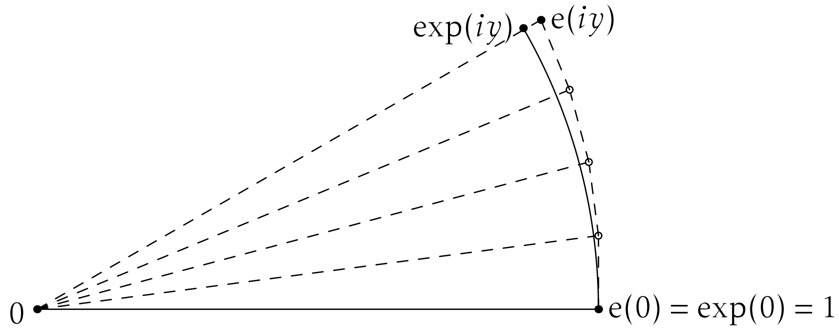


Figure 2 – Interprétation de $\mathrm{e}(iy)$ pour iy imaginaire pur.

Notons O l'origine et A_k le point d'affixe $(1+\frac{iy}{n})^k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Chaque point est obtenu à partir du précédent en multipliant son affixe par $1+i\frac{y}{n}$, ce qui signifie construire un triangle $\mathrm{OA}_k\mathrm{A}_{k+1}$ directement rectangle en A_k. La ligne polygonale ainsi construite se termine après un nombre n de constructions au point d'affixe $\mathrm{e}(iy)$. Les longueurs OA_k croissent suivant une progression géométrique de raison $\sqrt{1+y^2/n^2}$, depuis $\mathrm{OA}_0 = 1$ jusqu'à $\mathrm{OA}_n = |\mathrm{e}(iy)|$. Le troisième côté a une longueur $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1} = \frac{y}{n}\mathrm{OA}_k$, donc la ligne polygonale a pour longueur la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1} = \frac{y}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{1+\frac{y^2}{n^2}}\right)^k$$

Lorsque y est accessible et n non, $\left|\mathrm{e}(iy)\right| \simeq 1$ donc les points s'éloignent très peu du cercle. Dans la somme donnant la longueur totale, les termes vont croissant de 1 à un peu moins de $\sqrt{\mathrm{e}(y^2/n)}$, donc le total est encadré par y et $y\,\mathrm{e}(y^2/n) = y\,\mathrm{e}(\simeq 0) = y(\simeq 1) \simeq y$. La partie accessible de la longueur est donc y, celle de l'arc de cercle correspondant à l'angle y.

5.3 Mise sous forme de somme inaccessible

Pour z complexe accessible,

$$\exp z \simeq \mathrm{e}(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \frac{z^k}{k!}$$

Dans chaque terme d'indice k accessible, le produit contient un nombre accessible de facteurs, donc le résultat $\simeq z^k/k!$. Étudions la différence

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \exp z \simeq \sum_{k=0}^{n} \left[1 - \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)\right] \frac{z^k}{k!}$$

Pour $m \leqslant n$, notons S_m la somme des termes d'indices $0 \leqslant k < m$. Tant que m est accessible, $\mathrm{S}_m \simeq 0$ comme somme d'un nombre accessible de termes $\simeq 0$.

C'est l'occasion de présenter le surprenant lemme de Robinson. Le lecteur trouvant que le paragraphe suivant fleure la supercherie est invité à relire la preuve donnée par l'honorable [Rud87] du fait que l'intégrale d'une fonction positive mesurable est nulle ssi la fonction est nulle presque partout.

L'ensemble $\{m \leqslant n \quad m|\mathrm{S}_m| \leqslant 1\}$ est bien formé par une formule interne. Il contient tous les entiers naturels accessibles. D'après le théorème 2.6, il contient aussi un inaccessible. Soit m un tel entier, $|\mathrm{S}_m| \leqslant \frac{1}{m}$, donc $\mathrm{S}_m \simeq 0$. L'exercice montre que la somme restante $\simeq 0$, d'où $\exp z \simeq \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$.

Ex. 29 — 1. À l'aide d'une progression géométrique, montrer $\sum_{k=m}^{n} \frac{|z|^k}{k!} \simeq 0$.

2. La somme restante dont il est question ci-dessus $\simeq 0$.
3. La fonction exponentielle construite dans cette section ne dépend pas de l'inaccessible n utilisé.

Cette construction de l'exponentielle complexe suit des idées qui remontent en droite ligne à Euler. L'allure des calculs montre bien les notions de limite, dérivée ou série entière s'appliqueront sans difficulté à l'objet construit. Elle permet de démontrer la formule de Moivre avant d'aborder la notion de continuité. [Mey96] construit le logarithme d'un positif modéré pas très proche de zéro par un procédé comparable, basé sur les puissances non entières.

6 Définition externe d'une notion

Illustrons par un exemple une utilisation courante de (S). Dans $\mathbb{N}^*$, fixons un entier n inaccessible. Parmi les accessibles, on trouve mignons les x qui sont le quotient de n par un inaccessible. Cette notion est décrite par le critère externe $\mathrm{P} = \exists k \in \mathbb{N}^* \quad n = xk \wedge \neg k^{\mathrm{ac}}$.

Définir comme mignons les entiers vérifiant P n'apporte rien. On ne sait même pas former l'ensemble des entiers mignons.

Posons plutôt comme définition que x est mignon lorsqu'il appartient à l'ensemble $\mathrm{S} = {}^{\mathrm{S}}\{x \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{P}\}$. La définition n'a pas changé pour x accessible. Certes, on n'a pas de critère explicite pour les x inaccessibles. En revanche, pour x accessible, on peut remplacer à volonté le critère externe P par le critère équivalent *interne à paramètre accessible* $x \in \mathrm{S}$.

Par exemple, montrons qu'un diviseur de mignon est aussi mignon. Soient $x \in \mathrm{S}$ et x_1, x_2 tels que $x = x_1 x_2$, on veut prouver $x_1 \in \mathrm{S}$. $(\mathrm{T}_\forall)$ permet de supposer x, x_1, x_2 accessibles. Comme x est accessible dans S, il vérifie le critère P. Pour un certain k inaccessible, $n = xk = (x_1 x_2)k = x_1(x_2 k)$ avec $x_2 x \geqslant k$ inaccessible. Comme x_1 est accessible et vérifie P, il se trouve dans S.

Ex. 30 — Que vaut S quand n est premier ? une puissance de 2 ?

7 Un peu de suites réelles

7.1 Définitions externes

Le lien avec les définitions usuelles se trouve dans l'annexe A.

Définition. Une suite est *bornée* lorsqu'elle appartient à

$$^{\mathrm{S}}\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad u_n \text{ modéré pour tout } n \text{ inaccessible}\}$$

Puisque les autres termes, images par une suite accessible d'un naturel accessible, sont accessible et en particulier modérés, ceci revient à dire que *tous* les termes sont modérés.

Un valeur est *adhérente* à une suite lorsque leur couple appartient à

$$^{\mathrm{S}}\{(l, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad u_n \simeq l \text{ pour un certain } n \text{ inaccessible}\}$$

Une suite *tend vers* $+\infty$ lorsqu'elle appartient à

$$^{\mathrm{S}}\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad u_n \text{ est immodéré positif pour tout } n \text{ inaccessible}\}$$

Une suite *converge* vers un réel lorsque leur couple appartient à

$$^{\mathrm{S}}\{(u, l) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R} \quad u_n \simeq l \text{ pour tout } n \text{ inaccessible}\}$$

Une suite vérifie le *critère de* Cauchy lorsqu'elle appartient à

$$^{\mathrm{S}}\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad u_n \simeq u_m \text{ pour tous } n, m \text{ inaccessibles}\}$$

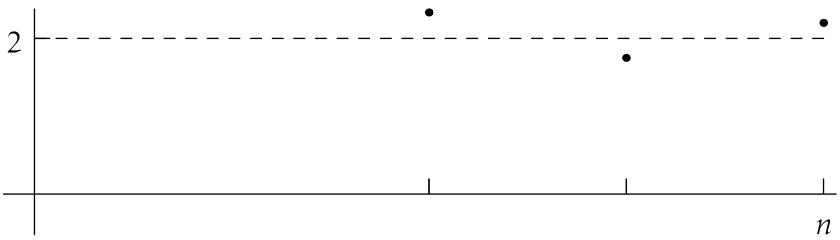


FIGURE 3 – Suite de terme général $2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$

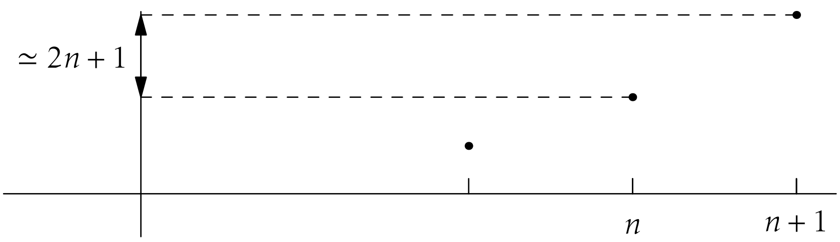


FIGURE 4 – Suite de terme général $n^2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$

Exemple. Toute suite constante converge vers sa valeur. En effet, soit u accessible constante de valeur l. Comme $l = u_0$ est accessible, on peut utiliser le critère écrit plus haut pour la convergence. Comme $u_n = l$ pour tout n, en particulier $u_n \simeq l$ pour tout n inaccessible. Par ($T_\forall$), le résultat persiste pour une suite constante quelconque, même inaccessible.

Exemple. Soit u une suite accessible vérifiant $\forall n \quad u_{n+1} = 2u_n - 1$ et qui converge vers un accessible l. Pour tout n inaccessible, $l \simeq u_{n+1} = 2u_n - 1 \simeq 2l - 1$. Les deux étant accessibles, $l = 2l - 1$ et $1 = l$. Par transfert, une suite quelconque vérifiant cette relation ne peut converger que vers 1.

Exemple. Soient u de terme général $2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ (figure 3), et n, m inaccessibles. Par application des règles de calcul sur les ordres de grandeur, $u_m \simeq u_n \simeq 2$. Comme 2 est accessible, u_n est modéré. Donc u est bornée, adhère à 2, ne tend pas vers $+\infty$, converge vers 2, et vérifie le critère de CAUCHY.

Exemple. Soient u de terme de terme général $n^2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ (figure 4) et n inaccessible. Par les règles de calcul sur les ordres de grandeur, u_n est immodéré. Donc u n'est pas bornée, tend vers $+\infty$, n'a pas de valeur d'adhérence et ne converge pas (on pourrait supposer l accessible, u_n serait $\simeq$ d'un accessible donc modéré). De plus, $u_{n+1} - u_n \simeq 2n + 1 \not\simeq 0$, donc u ne vérifie pas le critère de CAUCHY.

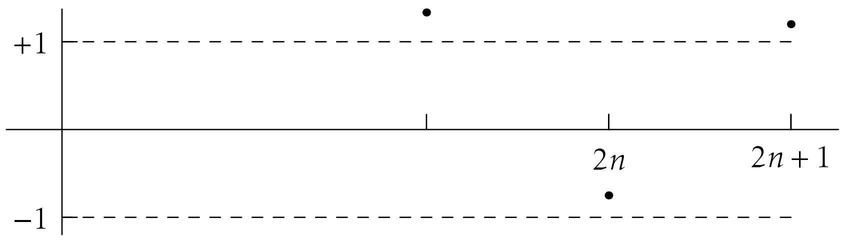


Figure 5 – Suite de terme général $(-1)^n + \frac{1}{n+1}$

Exemple. Soient u la suite de terme général $(-1)^n + \frac{1}{n+1}$ (figure 5) et n inaccessible. $u_n \simeq (-1)^n$ et $u_{2n} - u_{2n+1} \simeq 2$ par les règles de calcul sur les ordres de grandeur. Donc u est bornée, admet ± 1 commes valeurs d'adhérence, ne tend pas vers $+\infty$, ne converge pas (on pourrait supposer l accessible et $0 = l - l \simeq u_{2n} - u_{2n+1} \simeq 2$), ne vérifie pas le critère de Cauchy.

7.2 Suites de Cauchy

Théorème 7.1. *Soient u une suite et l un nombre.*

u converge vers l ssi elle vérifie le critère de Cauchy *et l est valeur d'adhérence.*

Démonstration. Il n'est pas restrictif de supposer u, l accessibles.

Supposons que u converge vers l. D'une part, choisissons un n inaccessible, $u_n \simeq l$ donc l est valeur d'adhérence. D'autre part, pour tous n, m inaccessibles, $u_n \simeq l \simeq u_m$. Comme n, m sont quelconques, u vérifie le critère de Cauchy.

Réciproquement, si une suite u vérifie le critère de Cauchy et $u_m \simeq l$ pour un m inaccessible, alors pour tout n inaccessible, $u_n \simeq u_m \simeq l$. □

Théorème 7.2. *Une suite vérifiant le critère de* Cauchy *est bornée.*

Démonstration. Soit u vérifiant le critère de Cauchy, montrons que u est bornée. Il n'est pas restrictif de supposer u accessible.

Choisissons un n inaccessible, et posons $m = \max\{|u_k| \quad k \leqslant n\}$, ensemble inaccessible mais fini.

— Si k est accessible, $k \leqslant n$ donc $|u_k| \leqslant m$ par définition d'un maximum.

— Sinon, le critère de Cauchy impose $u_k \simeq u_n$ donc $u_k \leqslant u_n + 1 \leqslant m + 1$.

Ainsi, il existe un m tel que $\forall k \quad |u_k| \leqslant m+1$. ($T_\exists$) permet de choisir m accessible, donc tous les termes sont modérés. □

Théorème 7.3. *Une suite vérifiant le critère de* Cauchy *admet au plus une valeur d'adhérence.*

Démonstration. Soit u vérifiant le critère de Cauchy, l, l' deux valeurs d'adhérence, montrons $l = l'$. Il n'est pas restrictif de supposer u, l, l' accessibles.

Pour certains n, n' inaccessibles, $u_n \simeq l$ et $u_{n'} \simeq l'$. Comme u vérifie le critère de Cauchy, $l \simeq u_n \simeq u_{n'} \simeq l'$. Deux accessibles très proches sont égaux. □

Ex. 31 — Prouver directement que :

1. une suite converge vers au plus un réel ;
2. une suite convergente est bornée ;
3. le produit de deux suites convergentes converge.

Ex. 32 — Vérifier que les suites bornées forment une sous-algèbre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

7.3 Suites réelles

Théorème 7.4. *Une suite complexe bornée possède une valeur d'adhérence.*

Démonstration. Soit u accessible bornée. Choisissons un n inaccessible, u_n est modéré, il a une partie accessible, dont il est très proche. □

En particulier, une suite de Cauchy converge.

Théorème 7.5. *Une suite réelle croissante converge ou tend vers* $+\infty$.

Démonstration. Soit u accessible croissante ne tendant pas vers $+\infty$. Pour un m inaccessible, u_m est modéré, notons l sa partie accessible. Prouvons que u converge vers l.

Nous aurons besoin d'un lemme pour a accessible. Lorsque qu'il existe un n tel que $a \leqslant u_n$, ($T_\exists$) permet de choisir n accessible, par croissance l'inégalité persiste pour tout n inaccessible. Par contraposition, si un certain n inaccessible vérifie $u_n < a$, alors c'est vrai pour tout entier.

Soit $a > 0$ accessible. $|u_m - l| < a$ donc $l - a \leqslant u_m < l + a$. D'après le lemme, $l - a \leqslant u_n$ pour tout n inaccessible. D'après sa contraposée, $u_n < l + a$ pour tout n. En regroupant, pour tout n inaccessible $1 - a \leqslant u_n < 1 + a$. Quitte à recommencer avec $a/2$, l'inégalité de droite peut être rendue stricte. □

Théorème 7.6 (Suites adjacentes)**.** *Deux deux suites rélles u, v telles que u croît, v décroît et $v - u$ converge vers* 0*, alors u et v convergent vers une limite commune.*

Démonstration. Il n'est pas restrictif de supposer u, v accessibles. Pour n inaccessible, $v_n \simeq u_n$, donc $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n + 1 \leqslant v_0 + 1$, donc u_n est modéré. Comme u est croissante et ne tend pas vers $+\infty$, u converge vers un réel l. Pour tout n inaccessible, $v_n = l + (u_n - l) \simeq l$ donc v aussi. □

8 Un peu de fonctions réelles continues

8.1 Définitions externes

Le lien avec les définitions internes usuelles est traité dans l'annexe A. Les définitions externes sont explicitées pour des accessibles, mais leur généralisation par standardisation, fastidieuse et sans intérêt, sera omise.

Une fonction accessible f est *bornée* lorsqu'elle ne prend que des valeurs modérées. Cette restriction ne contraint en réalité que les images des inaccessibles, puisque l'image d'un accessible est accessible et en particulier modérée.

Un réel accessible a est *adhérent* à une partie accessible D de $\mathbb{R}$ lorsqu'il existe un élément de D très proche de a. Ceci peut se produire de deux façons. D'une part, un accessible de D adhère trivialement à D. D'autre part, un accessible $a \notin \mathrm{D}$ peut être très proche d'un élément de D, nécessairement inaccessible puisque deux accessibles très proches sont égaux.

Une fonction accessible f *tend vers* $+\infty$ en un accessible a adhérent à son domaine lorsque tous les x de ce domaine très proches de a ont une image immodérée positive. Ceci n'est évidemment possible que si $a \notin \mathrm{D}$, car l'image par f d'un accessible est accessible et en particulier modérée.

Une fonction accessible f *converge* vers un réel accessible l en un accessible a adhérent à son domaine lorsque tous les x de ce domaine très proches de a ont une image très proche de l. Lorsque $a \in \mathrm{D}$, ceci exige en particulier que $f(a) \simeq l$, donc qu'ils soient égaux. On dit dans ce cas que f est *continue* en a.

Une fonction accessible f est *continue* lorsqu'elle est continue en tout accessible de son domaine D, c'est-à-dire lorsque

$$\forall x^{\mathrm{ac}} \in \mathrm{D} \quad \forall x' \in \mathrm{D} \quad x \simeq x' \implies f(x') \simeq f(x)\}$$

Une fonction accessible f est *uniformément continue* lorsque deux éléments très proches de son domaine D ont des images très proches, c'est-à-dire lorsque

$$\forall x \in \mathrm{D} \quad \forall x' \in \mathrm{D} \quad x \simeq x' \implies f(x') \simeq f(x)\}$$

Ceci impose en particulier à f d'être continue sur D.

Comme des nombres très proches ont des valeurs absolues très proches, la valeur absolue d'une fonction (uniformément) continue est (uniformément) continue. En fait, ces deux raisonnements ne sont valables que pour une fonction accessible, mais le transfert montre que le résultat est valable inconditionnellement.

Ex. 33 —

1. La fonction identité $x \mapsto x$ est uniformément continue.
2. Une fonction constante est uniformément continue.
3. Les fonctions (uniformément) continues forment un espace vectoriel.

4. Un produit de deux fonctions continues est continu.
5. La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas uniformément. Elle l'est sur $[-a, a]$ pour $a > 0$ accessible.
6. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, mais pas uniformément. Elle l'est sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ pour $a^{\mathrm{ac}} > 0$.
7. Une fraction rationnelle accessible est continue.
8. L'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, uniformément sur $]-\infty, a]$ pour a accessible.

8.2 Fonction continue sur un segment

Étudions maintenant les propriétés d'une fonction réelle accessible continue sur un segment accessible $[a, b]$. Dans ce cas, tout $x \in [a, b]$ est modéré et possède une partie accessible ${}^\circ x$. Comme $a \leqslant x \leqslant b$ et $x \simeq {}^\circ x$, la propriété reliant la proximité et l'ordre montre que $a \leqslant {}^\circ x \leqslant b$, c'est-à-dire que ${}^\circ x \in [a, b]$. De plus, par continuité en l'accessible ${}^\circ x$, $f(x) \simeq f({}^\circ x)$.

Théorème 8.1. *Une fonction réelle continue sur un segment l'est uniformément.*

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons la fonction f accessible. Soient $x' \simeq x$ dans son domaine. Par transitivité, $x' \simeq {}^\circ x$. Par continuité de f en l'accessible ${}^\circ x$, $f(x') \simeq f({}^\circ x)$. Par transitivité, $f(x') \simeq f(x)$. □

Fixons un naturel n inaccessible, et procédons à un échantillonage de f en subdivisant le segment $[a, b]$ en n segments de même longueur $\frac{b-a}{n}$ très petite à l'aide des points $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour k de 0 à n. Il est clair que tout x vérifie $x \in [x_{k-1}, x_k]$ pour un certain k, parfois deux. Comme la largeur de l'intervalle est très petite, $x \simeq x_k$. Par continuité uniforme, $f(x) \simeq f(x_k)$.

Remarque. On pourrait croire un peu vite que l'approximation $f(x_{k-1}) \simeq f(x_k)$ entraîne que tous les $f(x_k)$ doivent être très proches les uns des autres. Le raisonnement implicite, basé sur une récurrence, serait valable pour = ou <, mais pas pour la propriété externe $\simeq$. Tous les $f(x_k)$ sont très proches de $f(a)$ pour k accessible, ce qui laisse de la marge pour les autres k, de loin plus nombreux.

Théorème 8.2. *Une fonction réelle continue sur un segment possède un maximum et un minimum.*

Démonstration. Il suffit de le vérifier pour une fonction f accessible sur un segment $[a, b]$ accessible. Montrons l'existence d'un maximum, le cas d'un minimum est similaire en retournant les inégalités portant sur les images par f.

Notons $f(x_m) = \max\{f(x_k) \quad 1 \leqslant k \leqslant n\}$, et montrons que f possède un maximum en ${}^\circ x_m$ (figure 6). D'après $(\mathrm{T}_\forall)$, il suffit de montrer que $f(x) \leqslant f({}^\circ x_m)$ pour x

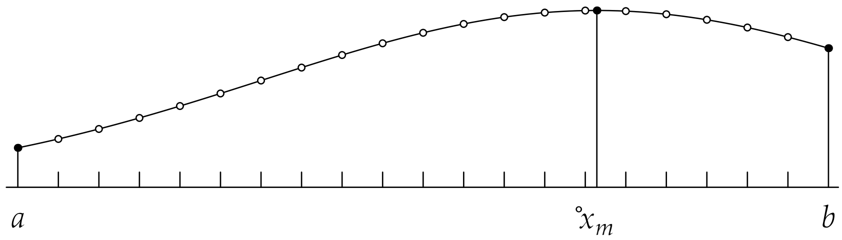


Figure 6 – Maximum d'une fonction réelle continue sur un segment.

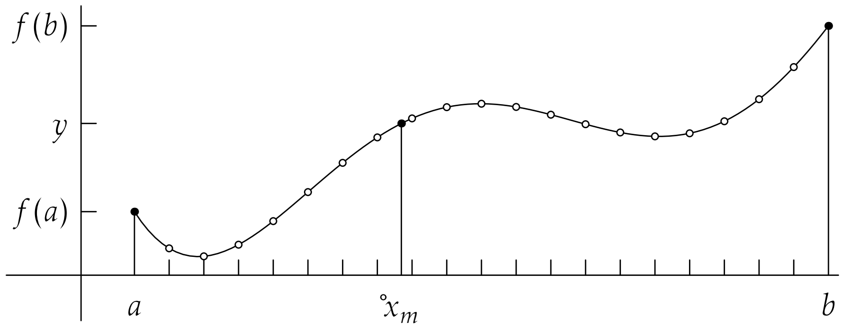


Figure 7 – Théorème des valeurs intermédiaires.

accessible. Soit un tel x, notons k un indice tel que $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Par continuité en x, $f(x) \simeq f(x_k)$. Par définition de m, $f(x_k) \leqslant f(x_m)$. Par continuité en l'accessible $\mathring{x}_m$, $f(x_m) \simeq f(\mathring{x}_m)$. Comme $f(x)$ et $f(\mathring{x}_m)$ sont accessibles, $f(x) \leqslant f(\mathring{x}_m)$. □

Théorème 8.3 (des valeurs intermédiaires). *Par une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, tout nombre intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ possède un antécédent.*

Démonstration. Il suffit de le vérifier pour f, y, a, b accessibles. Traitons le cas où $f(a) \leqslant y < f(b)$. Le cas $y = f(b)$ est trivial, et le cas $f(a) \geqslant f(b)$ se traite de façon similaire en retournant les inégalités.

L'ensemble $\mathrm{E} = \{1 \leqslant k \leqslant n \quad y < f(x_k)\}$ n'est pas vide car $y < f(b) = f(x_n)$. Notons $m = \min \mathrm{E}$ et montrons que $f(\mathring{x}_m) = y$ (figure 7).

Par définition de m, $f(x_{m-1}) \leqslant y < f(x_m)$. Par continuité en $\mathring{x}_m$, $f(x_{m-1})$ et $f(x_m) \simeq f(\mathring{x}_m)$. Comme $f(\mathring{x}_m)$ et y sont accessibles, $f(\mathring{x}_m) \leqslant y \leqslant f(\mathring{x}_m)$. □

9 Intégration d'une fonction réglée

Cette section suffit largement pour justifier la plupart des calculs enseignés aux scientifiques non mathématiciens : dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, coefficients de Fourier d'un créneau...

9.1 Fonction réglée sur un intervalle

On appelle *subdivision* d'un intervalle I une partie δ finie de $[a, b[$ contenant a. Pour $t \in \delta$, on note alors $t + \delta t$ le point suivant de la subdivision, ou, à défaut, b. Plus formellement, $t + \delta t = \min\{x \in \delta \quad t < x\} \cup \{b\}$.

Tant que a ou b n'est pas infini, la notation $\delta t = (t + \delta t) - t$ a un sens seul, c'est la largeur du sous-intervalle défini par δ et qui commence en t. Le *pas* de δ la plus grande de ces largeurs, c'est-à-dire $\max\{\delta t \quad t \in \delta\}$. Ajouter des points à une subdivision ne peut que diminuer le plus petit des intervalles qu'elle définit. Autrement dit, le pas décroît en fonction de la subdivision.

Une fonction *étagée* sur un intervalle I est constante sur chaque intervalle ouvert $]t, t+\delta t[$ défini par une subdivision δ. Une telle subdivision est dite adaptée à f, toute subdivision la contenant est aussi adaptée.

D'une part, les constantes sont évidemment étagées, n'importe quelle subdivision étant adaptée. D'autre part, si f, g sont étagées et λ un réel, alors la réunion d'une subdivision adaptée à f et à g est adaptée à $\lambda f + g$. Ainsi, les fonctions étagées forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathrm{I}}$. Comme une fonction étagée ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle possède un minimum et un maximum. La valeur absolue d'une fonction étagée l'est aussi. En fait, pour toute fonction réelle f, $f \circ g$ est étagée dès que g l'est.

Définition. Une fonction accessible f définie sur un intervalle accessible I est *réglée* lorsqu'une fonction étagée prend des valeurs très proches de celles de f en chaque point dont la partie accessible est dans I.

Cette définition s'étend par standardisation aux I, f inaccessibles. Le détail est fastidieux et sans intérêt puisqu'il ne fournit aucun critère explicite. L'équivalence avec la définition usuelle est donnée dans la section A.

Lorsque $\mathrm{I} = [a, b]$ est un segment, chaque x de I possède une partie accessible dans I, et la condition sur la fonction étagée g se résume en $\forall x \in \mathrm{I} \quad g(x) \simeq f(x)$. Lorsqu'une des bornes, disons b, est réelle en dehors de I, les $x \simeq b$ n'ont pas de partie accessible dans I, et la condition n'impose rien à leurs images par f et g. La situation est similaire si $b = +\infty$, puisqu'alors I contient des immodérés positifs, sans partie accessible.

Une fonction accessible étagée est très proche d'elle-même, donc réglée. Par transfert, toute fonction étagée est réglée. Le lecteur vérifiera que les fonctions réglées forment un espace vectoriel.

Tout ceci peut sembler un peu vain tant qu'on ne dispose d'aucune fonction réglée non triviale. L'objet des résultats suivants est de montrer que beaucoup de fonctions usuelles sont réglées.

Théorème 9.1. *Une fonction monotone sur un intervalle est réglée.*

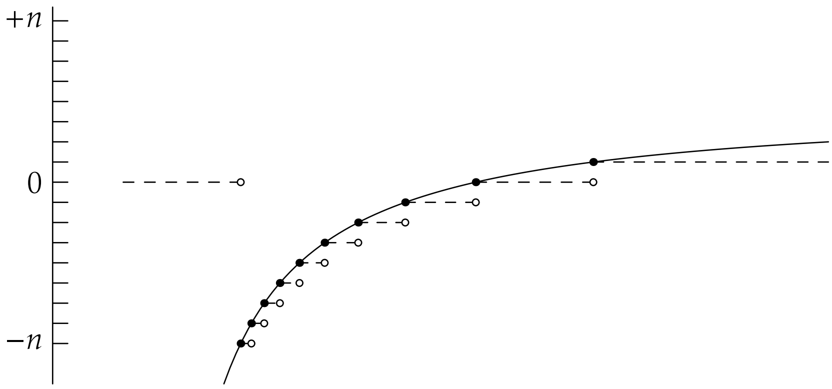


Figure 8 – Une fonction monotone sur un intervalle est réglée.

Démonstration. Il suffit de le vérifier pour une fonction f accessible sur un intervalle I accessible. Supposons f croissante, le raisonnement s'adapte au cas décroissant en retournant quelques inégalités. Fixons un naturel n inaccessible.

Introduisons une subdivision δ de pas $\simeq 0$ de l'intervalle $[-n, n]$, par exemple en n^2 sous-intervalles de même longueur, et définissons la fonction g sur I par

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(t) \notin [-n, n[\\ y & \text{si } f(t) \in [y, y + \delta y[\text{ pour un } y \in \delta \end{cases}$$

Cette fonction est bien définie, puisque chaque $t \in \mathrm{I}$ se trouve dans un et un seul des cas mentionnés. Elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. De plus, par croissance de f, chaque condition $f(t) \in [y, y + \delta y[$ définit une partie convexe de I, c'est-à-dire un intervalle, éventuellement vide. Bref, g est étagée (figure 9).

Soit $t \in \mathrm{I}$ ayant une partie accessible $\mathring{t}$ dans I. Trois cas sont possibles :

— si b est réel $\in \mathrm{I}$, $f(t) \leqslant f(b)$;
— si b est réel $\notin \mathrm{I}$, $f(t) \leqslant f(\frac{\mathring{t}+b}{2})$;
— si $b = +\infty$, $f(t) \leqslant f(\mathring{t} + 1)$.

Dans les trois cas, $f(t)$ est inférieur à l'image d'un accessible par une fonction accessible. Une discussion similaire sur a montre que $f(t)$ est encadré par deux valeurs modérées. Il appartient donc à un des $[y, y + \delta y[$, et $g(t) = y \simeq f(t)$. □

Théorème 9.2. *Une fonction continue sur un intervalle est réglée.*

Démonstration. Il suffit de le vérifier pour une fonction f accessible sur un intervalle I accessible. Fixons un naturel n inaccessible, une subdivision δ de pas $\simeq 0$ de l'intervalle $\mathrm{I} \cap [-n, n]$, par exemple une subdivision en n^2 sous-intervalles

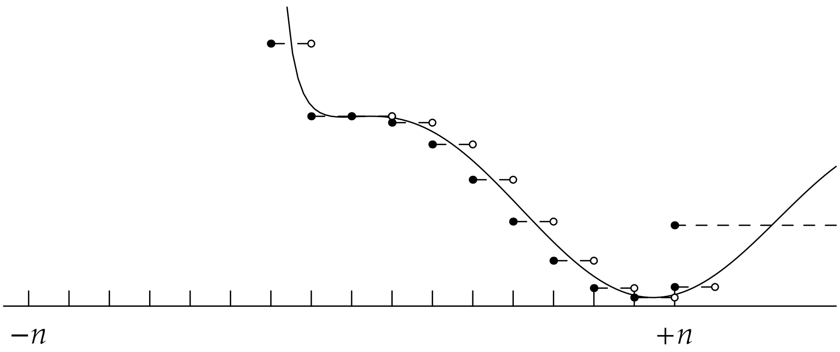


Figure 9 – Une fonction continue sur un intervalle est réglée.

de même longueur, et définissons la fonction étagée g sur I par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-n, n[\\ f(b) & \text{si } x = b \\ f(t + \frac{\delta t}{2}) & \text{si } x \in [t, \delta t[\end{cases}$$

Soit $x \in \mathrm{I}$ ayant une partie accessible ${}^\circ x$ dans I. Il ne peut pas se trouver dans le premier cas, qui ne concerne que des x immodérés. S'il est dans le deuxième cas, trivialement $g(x) \simeq f(x)$. Dans le dernier, $\delta t \simeq 0$ donc $x \simeq t + \frac{\delta t}{2}$. Par continuité de f en l'accessible ${}^\circ x$, $g(x) = f(t + \frac{\delta t}{2}) \simeq f({}^\circ x) \simeq f(x)$.

La figure 9 illustre cette preuve sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Les $x \simeq 0$ et les $x > n$, n'ayant pas de partie accessible dans I, ne sont pas concernés par la définition d'une fonction réglée. □

Ex. 34 — Supposons que $\mathrm{I} = [a, b]$ est un segment. Une fonction f est *continue par morceaux* (c.p.m.) lorsqu'elle est uniformément continue sur les intervalles ouverts d'une subdivision.

1. Une fonction continue est c.p.m.
2. Commençons par deux préliminaires directement inspirés des preuves correspondantes pour une suite de Cauchy.
   a) Si f est uniformément continue sur $]a, b[$, alors f est bornée.
   b) Si f est uniformément continue sur $]a, b[$, alors f est la restriction d'une fonction continue définie sur $[a, b]$.
   c) Une fonction c.p.m. est réglée bornée.
3. Si f est c.p.m. et la subdivision δ adaptée, une subdivision contenant δ l'est aussi.
4. Les fonctions c.p.m. forment un espace vectoriel.

9.2 Intégrale d'une fonction réglée bornée sur un segment

On se limite désormais au cas d'un segment $\mathrm{I} = [a,b]$. Il est facile de définir l'intégrale d'une fonction étagée en posant $\mathrm{I}(f) = \sum_{x\in\delta} \mathrm{C}_x \delta x$, où δ est une subdivision adaptée et C_x la valeur constante de $f(t)$ pour $t \in]x, x+\delta x[$.

Cette définition est valable dans la mesure où le résultat ne dépend pas de la subdivision adaptée utilisée. En effet, ajouter un point x_2, dans un intervalle $]x_1, x_3[$ de la subdivision sur lequel f est constante de valeur C, n'a pour effet que de remplacer le terme $\mathrm{C}(x_3 - x_1)$ par les deux termes $\mathrm{C}(x_2 - x_1) + \mathrm{C}(x_3 - x_2)$, ce qui ne change pas le total. Par récurrence sur le nombre de points ajoutés, toute subdivision plus grande que δ donne la même somme. Si δ' est une autre subdivision adaptée à f, $\delta \cup \delta'$ l'est aussi, et les trois calculs mènent au même résultat puisque la réunion contient les deux autres.

Pour λ réel et f, g étagées, il est facile de vérifier que

$$\mathrm{I}(\lambda f + g) = \lambda \mathrm{I}(f) + \mathrm{I}(g) \tag{1}$$

$$0 \leqslant f \implies 0 \leqslant \mathrm{I}(f) \tag{2}$$

En particulier, $\mathrm{I}(g) - \mathrm{I}(f) = \mathrm{I}(g - f)$ est positif quand $g - f$ l'est, donc l'intégrale croît avec la fonction. Toute fonction étagée f vérifie l'encadrement

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad -\max_{\mathrm{I}} |f| \leqslant -|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)| \leqslant \max_{\mathrm{I}} |f|$$

qui conduit pour les intégrales à

$$|\mathrm{I}(f)| \leqslant \mathrm{I}(|f|) \leqslant (b-a) \max_{\mathrm{I}} |f| \tag{3}$$

Considérons maintenant une fonction f réglée bornée sur le segment $[a,b]$, en supposant en plus a, b, f accessibles. Dans un segment accessible, chaque point a une partie accessible, donc une approximation étagée de f montrant que f est réglée doit prendre des valeurs très proches de celles de f partout. Ceci a deux conséquences importantes.

D'une part, pour une telle approximation g, chaque valeur $g(x)$ est très proche de $f(x)$, qui est modérée car f est bornée. L'inégalité $|\mathrm{I}(g)| \leqslant (b-a) \max_{\mathrm{I}} |g|$ montre alors que l'intégrale de g doit être modérée.

D'autre part, deux approximations g, g' vérifient $g'(x) \simeq f(x) \simeq g(x)$ sur I, donc $\max_{\mathrm{I}} |g' - g| \simeq 0$. L'inégalité

$$\left|\mathrm{I}(g') - \mathrm{I}(g)\right| = \left|\mathrm{I}(g' - g)\right| \leqslant \mathrm{I}\left(\left|g' - g\right|\right) \leqslant (b-a) \max_{\mathrm{I}} \left|g' - g\right|$$

montre alors que leurs intégrales sont nécessairement très proches.

Il est donc possible, comme à la section 4, d'étendre l'application I en une application accessible définie sur l'ensemble des fonctions réglées bornées sur le segment $[a,b]$, de façon que

$$\forall f \text{ accessible} \quad \forall g \text{ étagée approchant f} \quad \mathrm{I}(f) \simeq \mathrm{I}(g)$$

Soient λ accessible, f, f' réglées accessibles, et g, g' étagées prenant sur $[a,b]$ des valeurs très proches de f, f' respectivement.

(i) $\mathrm{I}(\lambda f + f') \simeq \mathrm{I}(\lambda g + g') = \lambda \mathrm{I}(g) + \mathrm{I}(g')$, et, λ étant modéré, $\simeq \lambda \mathrm{I}(g) + \mathrm{I}(g')$. Les extrémités sont accessibles, donc égales.

(ii) Si $0 \leqslant f$, alors $\max(0, g)$ est aussi étagée et très proche de f. Quitte à la modifier, supposons $g \geqslant 0$. Alors $0 \leqslant \mathrm{I}(g) \simeq \mathrm{I}(f)$. Les extrémités sont accessibles donc dans le même ordre.

Les résultats persistent pour des inaccessibles par transfert, ce qui étend les propriétés (1), (2) aux fonctions réglées, ainsi que la partie gauche de (3).

On peut alors introduire la notation de Leibniz $\int_a^b f(t)dt = \mathrm{I}(f)$, et vérifier, dès que les quantités intervenant ont un sens, les formules

$$\int_{a+\alpha}^{b+\alpha} f(t)dt = \int_a^b f(t+\alpha)dt$$

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$$

Ces égalités, évidentes pour pour des étagées, se généralisent aux réglées.

Théorème 9.3 (Approximation uniforme). *Deux fonctions réglées prenant des valeurs très proches sur un segment accessible ont des intégrales très proches.*

Démonstration. Le résultat est déjà connu pour des fonctions étagées. Il n'a aucun intérêt pour des fonctions accessibles, puisque deux fonctions accessibles prenant des valeurs très proches sont égales. Le transfert ne permettrait de toutes façons pas de généraliser un énoncé externe aux fonctions inaccessibles.

Comme $|\mathrm{I}(f') - \mathrm{I}(f)| = |\mathrm{I}(f' - f)| \leqslant \mathrm{I}(|f' - f|)$, il suffit de montrer qu'une fonction prenant des valeurs positives très proches de zéro a une intégrale très proche de zéro. Dans ce cas, chaque valeur $f(t)$ est inférieure à tout $\mathrm{M} > 0$ accessible, donc $\mathrm{I}(f) \leqslant \mathrm{I}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}(b-a)$. Quitte à remplacer M par $\mathrm{M}/(b-a)$, ceci montre que $\mathrm{I}(f)$ est inférieure à tout accessible strictement positif. □

Ex. 35 — Donner un contre-exemple montrant que le résultat ne se généralise pas à un segment quelconque.

Ex. 36 — Soit f continue accessible sur $[a,b]$.

1. Pour toute subdivision δ de pas $\simeq 0$ de $[a,b]$, et tout choix d'un x_t dans chaque intervalle $[t, t+\delta t]$, $\mathrm{I}(f) \simeq \sum_{t\in\delta} f(x_t)\delta t$.
2. Calculer $\int_a^b t\,dt$ à l'aide d'une subdivision régulière.
3. Pour $a > 0$, posons $\ln a = \int_1^a \frac{1}{t}dt$. Soit $b > 0$, calculer $\ln \exp b$ à l'aide d'une subdivision formant une progression géométrique.

Ex. 37 — Pour cet exercice, $\mathrm{I} = [0,1]$, et n désigne un naturel inaccessible fixé. Le théorème 9.3 s'applique-t-il directement aux fonctions f, g suivantes ?

1. $f(t) = \frac{n}{n+t}$ et $g(t) = 1$.
2. $f(t) = t^n$, $g(t) = 0$ si $t \in [0,1[$ et 1 si $t = 1$.
3. $f(t) = \exp t$ et $g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.

9.3 Intégration sous le signe somme

La proximité dans $\mathbb{R}^2$ a été définie indirectement par la proximité dans $\mathbb{C}$. En résumé, $(x,y) \simeq (x',y') \iff x \simeq x' \wedge y \simeq y'$. Les définitions de la continuité et de la continuité uniforme s'adaptent alors pour deux variables.

Ex. 38 — Soient $a < b$, $c < d$ et $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continue, tous accessibles.

1. La fonction f est uniformément continue.
2. Pour tout y, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est uniformément continue.
   Le même raisonnement s'appliquerait aux $y \mapsto f(x,y)$.
3. Introduisons une subdivision δ de pas $\simeq 0$ du segment $[a,b]$.
   Pour tout y, même inaccessible, $\int f(x,y)dx \simeq \sum_{x\in\delta} f(x,y)\delta x$.
4. La fonction $y \mapsto \int_a^b f(x,y)dx$ est uniformément continue.
5. $\int \left(\int f(x,y)dx \right) dy = \int \left(\int f(x,y)dy \right) dx$

Le transfert étend ces résultats à une fonction continue sur un pavé.

10 Axiome d'idéalisation

Il est temps d'introduire la forme générale de l'axiome d'idéalisation, qui permet d'ouvrir d'autres champs d'application que le calcul numérique.

Cet axiome d'IST s'applique à une propriété P interne, qui peut dépendre de paramètres accessibles ou inaccessibles.

$$(\forall \mathrm{X}^{\mathrm{ac}} \text{ fini} \quad \exists y \quad \forall x \in \mathrm{X} \quad \mathrm{P}) \iff (\exists y \quad \forall x^{\mathrm{ac}} \quad \mathrm{P}) \qquad (\mathrm{I}^{\exists})$$

Comme le transfert, l'idéalisation a une formulation équivalente duale.

$$(\exists \mathrm{X}^{\mathrm{ac}} \text{ fini} \quad \forall y \quad \exists x \in \mathrm{X} \quad \mathrm{P}) \iff (\forall y \quad \exists x^{\mathrm{ac}} \quad \mathrm{P}) \tag{$\mathrm{I}^\forall$}$$

Par exemple, si on note $x \mid y$ la relation de divisibilité $\exists \quad k \in \mathbb{N} \quad xk = y$, l'idéalisation de $y \in \mathbb{N} \wedge (x \in \mathbb{N} \implies x \mid y)$ s'écrit plus lisiblement

$$(\forall \mathrm{X}^{\mathrm{ac}} \text{ fini} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathrm{X} \cap \mathbb{N} \quad x \mid y) \iff (\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x^{\mathrm{ac}} \in \mathbb{N} \quad x \mid y)$$

Pour tout X fini, $\mathrm{X} \cap \mathbb{N}$ est fini, le produit de ses éléments convient pour y. Le membre de gauche est vrai, par conséquent, le membre de droite aussi. Il affirme l'existence d'un multiple commun y de tous les entiers naturels accessibles. Cela n'a rien de surprenant, $y = 0$ convient.

Ex. 39 — Qu'obtient-on en idéalisant les propriétés suivantes ? Préciser chaque fois si le y obtenu peut être choisi accessible.

1. $y \in \mathbb{N}^* \wedge (x \in \mathbb{N}^* \implies x \mid y)$
2. $y \in \mathbb{N} \wedge (x \in \mathbb{N} \implies x < y)$,
3. $x \in y \wedge y$ fini

À l'aide de ce dernier axiome, il est possible de donner la preuve laissée en suspens. Bien entendu, il s'agit d'une satisfaction toute relative, puisqu'il faut admettre les trois axiomes sur la foi des articles mentionnés en introduction.

Démonstration du théorème 2.4. Démontrons l'équivalence de :

i E est accessible fini ;

ii E est inclus dans un accessible fini ;

iii Chaque élément de E est accessible.

i $\implies$ *ii* Si E est accessible fini, l'inclusion triviale $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{E}$ démontre ii.

ii $\iff$ *iii* Appliquons l'axiome ($\mathrm{I}^\exists$) à la formule interne $(y \in \mathrm{E}) \wedge (x = y)$:

$$(\exists \mathrm{X}^{\mathrm{ac}} \text{ fini} \quad \forall y \in \mathrm{E} \quad \exists x \in \mathrm{X} \quad y = x) \iff (\forall y \in \mathrm{E} \quad \exists x^{\mathrm{ac}} \quad y = x)$$

ii $\implies$ *i* Supposons E inclus dans un accessible fini X, et montrons i.

D'une part, E est nécessairement fini, de cardinal $\leqslant \operatorname{Card} \mathrm{X}$.

D'autre part, $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ est fini de cardinal $2^{\operatorname{Card} \mathrm{X}}$, et accessible comme X par transfert. Le sens direct *i* $\implies$ *iii* montre alors que ses éléments sont accessibles, en particulier E. □

11 Un peu de topologie générale

Rappelons qu'une *topologie* sur E est une famille $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{E})$ de parties de E contenant l'ensemble vide et E, stable par union quelconque et intersection finie. Une fois choisie une topologie, les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés *ouverts*, leurs complémentaires *fermés*. Soit A une partie de E, l'*intérieur* $\mathring{\mathrm{A}}$ d'une partie A est la réunion des ouverts inclus dans A. On appelle voisinage de a un ensemble contenant un ouvert contenant a.

Dans la topologie *grossière* $\mathcal{O} = \{\mathrm{E}, \{\}\}$, les seuls ouverts sont E et l'ensemble vide. Dans la topologie *discrète* $\mathcal{O} = \mathcal{P}(\mathrm{E})$, toute partie est ouverte. Dans la topologie *induite* par une distance d sur E, une partie est ouverte ssi elle contient une boule ouverte de rayon $r > 0$ autour de chacun de ses points.

$$\mathcal{O} = \{\mathrm{O} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \quad \forall a \in \mathrm{O} \quad \exists r > 0 \quad \forall x \quad d(a,x) < r \implies x \in \mathrm{O}\}$$

L'ensemble des ouverts contenant x sera noté $\mathcal{O}_x = \{\mathrm{O} \in \mathcal{O} \quad x \in \mathrm{O}\}$.

11.1 Proximité liée à une topologie

Dans ce qui suit, l'ensemble E est supposé accessible. Lorsque E est supposé muni d'une distance, cette distance est également supposée accessible. Toutes les variables seront des éléments de E sauf mention explicite du contraire.

Définition. Pour une topologie accessible $\mathcal{O}$, x est *voisin* de y lorsque chaque ouvert accessible contenant y contient aussi x ($\forall \mathrm{O}^{\mathrm{ac}} \in \mathcal{O}_y \quad x \in \mathrm{O}$).

On note alors $x \approx y$, propriété externe, réflexive et transitive.

Ex. 40 — Décrire $x \approx y$ pour les topologies grossière et discrète.

Ex. 41 — Montrer que $x \approx y$ ssi tout voisinage accessible de y contient x.

1. En supposant y accessible.
2. Dans le cas général.

Théorème 11.1. *Dans la topologie induite par une métrique accessible d, un élément x est voisin d'un accessible a ssi la distance entre x et a est très proche de* 0 *($\forall a^{ac} \quad \forall x \quad x \approx a \iff d(x,a) \simeq 0$).*

Démonstration. Soient a accessible, x voisin de a et $r > 0$ accessible. Alors, x appartient à la boule ouverte de rayon r, qui est un ouvert accessible. Par conséquent, $d(x,a) < r$. Comme r est quelconque, $d(x,a) \simeq 0$.

Réciproquement, soient a accessible, x tel que $d(x,a) \simeq 0$ et O un ouvert accessible contenant a. Alors O contient une boule de rayon $r > 0$. Par transfert, on peut choisir r accessible, donc $d(x,a) < r$, x appartient à la boule donc à O. Comme O est quelconque, $x \approx a$. □

Exemple. Considérons par exemple $\mathbb{R}$ muni de la topologie induite par la distance $|x-y|$ et $\epsilon \simeq 0$. Comme $|\epsilon - 0| \simeq 0$, $\epsilon \approx 0$. En revanche, l'ouvert accessible $\mathbb{R}^*$ montre que $0 \not\approx \epsilon$.

Comme le montre l'exemple précédent : la relation $\approx$ n'est pas symétrique en général, à la différence de $\simeq$; la caractérisation ci-dessus n'est pas forcément valable pour a inaccessible.

11.2 La proximité caractérise une topologie accessible

Lemme 11.2. *Tout x appartient à un certain ouvert O formé seulement de voisins ($\forall x \quad \exists \mathrm{O} \in \mathcal{O}_x \quad \forall y \in \mathrm{O} \quad y \simeq x$).*

Démonstration. Soit $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_x$ une famille accessible finie d'ouverts contenant tous x. Son intersection O :

- est incluse dans chaque élément $\mathrm{X} \in \mathcal{X}$ par définition d'une intersection ;
- contient x qui était présent dans chacun d'entre eux ;
- est ouverte comme intersection finie d'ouverts.

On vient de prouver $\forall \mathcal{X}^{\mathrm{ac}}$ fini $\subseteq \mathcal{O}_x \quad \exists \mathrm{O} \in \mathcal{O}_x \quad \forall \mathrm{X} \in \mathcal{X} \quad \mathrm{O} \subseteq \mathrm{X}$.
En appliquant l'axiome $(\mathrm{I}^{\forall})$, $\exists \mathrm{O} \in \mathcal{O}_x \quad \forall \mathrm{X}^{\mathrm{ac}} \in \mathcal{O}_x \quad \mathrm{O} \subseteq \mathrm{X}$.

Comme O est inclus dans tous les ouverts accessibles contenant x, chacun de ses éléments est voisin de x. □

Remarque. Il peut se trouver des voisins en dehors de O. Par exemple, dans l'espace $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ muni de la topologie induite par la métrique usuelle, $x = 0$ appartient à l'ouvert $\mathrm{O} =]-\epsilon, \epsilon[$ pour $\epsilon > 0$. Si $\epsilon \simeq 0$, O ne contient que des voisins de 0. Mais pas 2ϵ, qui est aussi voisin de 0.

Théorème 11.3. *Une partie accessible est ouverte ssi elle contient chaque voisin de chacun de ses accessibles.*

Démonstration. Soient O un ouvert accessible et x un voisin d'un accessible $a \in \mathrm{O}$. Par définition de $x \approx a$, $x \in \mathrm{O}$.

Réciproquement, soient O une partie accessible contenant les voisins de ses points accessibles. Soit $a \in \mathrm{O}$ accessible, le lemme 11.2 fournit un ouvert $\mathrm{O}(a)$ formé de voisins de a. Par hypothèse, O contient ces voisins donc $a \in \mathrm{O}(a) \subseteq \mathrm{O}$. Par transfert, tout $a \in \mathrm{O}$ est dans un ouvert $\mathrm{O}(a) \subseteq \mathrm{O}$. Comme O est la réunion des ouverts $\mathrm{O}(a)$, il est ouvert. □

Dans la topologie discrète, la condition ne demande à un ouvert accessible que de contenir ses propres points. Dans la topologie grossière, la condition demande à un ouvert accessible non vide, qui contient donc un accessible a, de contenir tout voisin, c'est-à-dire tout éléments de E. Dans la topologie induite par une métrique d, la condition demande à un ouvert accessible de contenir les boules de rayon très proche de zéro autour de ses accessibles.

D'après ce théorème, une topologie accessible est entièrement déterminée par la connaissance des voisins de chaque accessible. En d'autres termes, la connaissance de la véracité de $x \approx a$ en fonction de x quelconque et de a accessible suffit à reconstruire la topologie. En abrégé,

$$\mathcal{O} = {}^{\mathrm{S}}\{\mathrm{O} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \quad \forall a^{\mathrm{ac}} \in \mathrm{O} \quad \forall x \approx a \quad x \in \mathrm{O}\}$$

Définition (ou plutôt abus de langage)**.** Désormais, on dira « la topologie accessible $\approx$ » au lieu de « la topologie accessible $\mathcal{O}$ de proximité associée $\approx$ ».

Ex. 42 — Une partie accessible F est fermée ssi elle contient un accessible dès qu'elle contient un de ses voisins ($\forall a^{\mathrm{ac}} \quad \forall x \approx a \quad x \in \mathrm{F} \implies a \in \mathrm{F}$).

Ex. 43 — Une partie accessible V est voisinage d'un accessible a ssi V contient tous les voisins de a ($\forall x \approx a \quad x \in \mathrm{V}$).

11.3 Compacité

Pour l'équivalence avec la définition usuelle, voir l'annexe A. Nous ne suivons pas ici la tradition hexagonale d'inclure le caractère séparé dans la définition d'un compact.

Définition. Une topologie accessible est *compacte* lorsque chaque élément est voisin d'au moins un accessible ($\forall x \quad \exists a^{\mathrm{ac}} \quad x \approx a$).

Cette définition est étendue aux inaccessibles par standardisation. Dans l'ensemble $\mathcal{T}$ des topologies sur E, les topologies compactes sont les éléments de ${}^{\mathrm{S}}\{\mathcal{O} \in \mathcal{T} \quad \forall x \quad \exists a^{\mathrm{ac}} \quad \forall \mathrm{O}^{\mathrm{ac}} \in \mathcal{O} \quad a \in \mathrm{O} \implies x \in \mathrm{O}\}$. Cette étape n'apporte rien au sens des définitions et ne sera plus explicitée.

La topologie discrète est compacte ssi chaque élément de E est accessible, ce qui revient à dire que E est infini d'après le théorème 2.4 (on a explicitement supposé E accessible). La topologie grossière est compacte, car si E n'est pas vide il contient un élément accessible. Pour la topologie usuelle, $\mathbb{R}$ n'est pas compact, car ses immodérés n'ont pas de partie accessible.

Théorème 11.4. *Pour la topologie induite par la métrique usuelle, les parties de* $\mathbb{R}$ *compactes sont les fermés bornés.*

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour les parties K accessibles.

Si K est compacte, chaque élément est très proche d'un accessible, et en particulier modéré. Si ω est un immodéré positif, tout $x \in \mathrm{K}$ vérifie $|x| \leqslant \omega$, donc K est bornée. Montrons qu'elle est fermée. Soit un accessible a, supposons qu'un $x \approx a$ appartient à K. Comme K est compact, $x \approx a' \in$ K. D'après le théorème 11.1, $x \simeq a$ et $x \simeq a'$, donc $a = a'$ et en particulier $a \in$ K.

Réciproquement, supposons K fermée bornée. Par ($T_\exists$), un des M tels que $\forall M \quad |x| \leqslant M$ est accessible, donc chaque $x \in$ K est modéré et possède une partie accessible a. Reste à montrer que a est dans K. Comme K est fermée, accessible, et contient un $x \approx a$, il contient a. □

Ex. 44 — Une fonction réelle continue sur un compact l'est uniformément.

Définition. Une topologie accessible est *séparée* lorsque chaque élément a au plus un voisin accessible ($\forall x \quad \forall a_1{}^{\mathrm{ac}} \quad \forall a_2{}^{\mathrm{ac}} \quad x \approx a_1 \wedge x \approx a_2 \implies a_1 = a_2$).

La topologie discrète est séparée. La topologie grossière est séparée ssi E contient 0 ou 1 élément. S'il en contient deux distincts, on peut les choisir accessibles et ils sont voisins. La topologie induite par une distance est séparée. En effet, soit x un voisin de deux accessibles a_1, a_2, alors $d(a_1, a_2)$ est accessible par transfert, et $d(a_1, a_2) \leqslant d(a_1, x) + d(x, a_2) \simeq 0$. Le seul accessible très proche de 0 est 0, donc $a_1 = a_2$.

Définition. De deux topologies accessibles, $\approx'$ est *plus fine* que $\approx$ lorsqu'elle donne moins de voisins à chaque accessible ($\forall a^{\mathrm{ac}} \quad \forall x \quad x \approx' a \implies x \approx a$).

Toute topologie est plus fine que la grossière, et moins fine que la discrète, car c'est évident pour les accessibles.

Théorème 11.5. *(i) Une topologie plus fine qu'une séparée reste séparée.*

(ii) Une topologie moins fine qu'une compacte reste compacte.

(iii) Si une topologie compacte est plus fine qu'une autre topologie compacte, alors les deux sont confondues.

Démonstration. Soient deux topologies accessibles, $\approx'$ plus fine que $\approx$.

(i) Supposons $\approx$ séparée. Soient a_1, a_2 accessibles tels qu'il existe $x \approx' a_1, a_2$. Comme $\approx'$ est plus fine que $\approx$, $x \approx a_1, a_2$ donc $a_1 = a_2$. Comme a_1, a_2 sont arbitraires, $\approx'$ est aussi séparée.

(ii) Supposons $\approx'$ compacte. Soit $x \in$ E, pour un accessible a, $x \approx' a$. Comme $\approx'$ est plus fine que $\approx$, $x \approx a$. Comme x est quelconque, $\approx$ est aussi compacte.

(iii) Supposons les deux séparées compactes. Soient x un élément de E. Il existe un unique accessible a tel que $x \approx a$, et un unique accessible a' tel que $x \approx a'$. Comme $\approx'$ est plus fine que $\approx$, a' vérifie la condition définissant a, donc $a = a'$. Ainsi, les relations $\approx, \approx'$ coïncident pour x quelconque et a accessible. D'après les résultats de la partie 11.2, les deux topologies sont égales. □

Définition. Soient E un ensemble accessible muni d'une topologie accessible $\approx$, $l \in$ E accessible et $u : \mathbb{N} \to$ E une suite accessible à valeurs dans E.

l est *valeur d'adhérence* de u lorsque $u_n \approx l$ pour un certain n inaccessible.

u *converge* vers l lorsque $u_n \approx l$ pour tout n inaccessible.

Il est clair que si u accessible converge vers l accessible, alors l est valeur d'adhérence. Par transfert, cela reste vrai pour u, l inaccessibles.

Ces définitions généralisent le cas particulier de $\mathbb{R}$ muni de la topologie induite par la distance usuelle. En effet, si u, l sont accessibles, cela découle du théorème 11.1. Par transfert, cela reste vrai en général.

Théorème 11.6. *Une suite à valeurs dans un espace muni d'une topologie :*

(i) séparée converge vers au plus un élément ;

(ii) compacte possède une valeur d'adhérence.

Démonstration. Supposons tout accessible, fixons un n inaccessible.

(i) Si u converge vers l, l' accessibles, alors $u_n \approx l, l'$. Si $\approx$ est séparée, $l = l'$.

(ii) Si $\approx$ est compacte, fixons un n inaccessible, $u_n \approx a$ un accessible, donc a est valeur d'adhérence. □

Définition. Soient E un ensemble accessible muni d'une topologie accessible $\approx$ et $f :$ E $\to \mathbb{R}$ accessible.

f est *continue* lorsque $\forall a^{\mathrm{ac}} \quad \forall x \approx a \quad f(x) \approx f(a)$.

La fonction partie entière fournit un exemple non continu pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Notons $\epsilon \simeq 0$ strictement positif. On a donc $0 < 1-\epsilon < 1$. D'une part $1-\epsilon \approx 1$ puisque 1 est accessible et $1-\epsilon \simeq 1$. D'autre part, $f(1) = 1$ et $f(1-\epsilon) = 0$ ne sont clairement pas très proches. La fonction f n'est pas continue.

La fonction inverse fournit un exemple de fonction continue. Soient $x \approx a$ avec a accessible. Comme a est accessible, $x \simeq a$. Comme a est accessible, $a \not\simeq 0$, et d'après les règles de calcul sur les ordres de grandeur, $1/x \simeq 1/a$. Comme x, a sont quelconques, f est continue.

Théorème 11.7. *L'image par une fonction réelle continue d'un compact est compacte pour la topologie induite par la métrique usuelle.*

Démonstration. Supposons tout accessible. Soit $y = f(x)$ un élement de l'image de f. Comme E est compact, $x \approx a$ un accessible. Par continuité de f, $f(x) \simeq f(a)$, image de l'accessible a par l'application accessible f, donc accessible. Comme y est quelconque, l'image de f est compacte. □

Remarque. Le lecteur séduit par l'élégance de l'approche décrite ici doit préférer l'original [Sar95] à cette pâle copie. Un très vaste choix de classiques y est exposé avec rigueur et exercices corrigés en vingt-cinq pages nettement plus intuitives que les exposés usuels. Il donne en particulier des conditions pour qu'une relation $\approx$ donnée au départ définissent directement une topologie, sans besoin d'expliciter les ouverts.

A Traduction interne des définitions

A.1 Suites réelles

Une suite réelle u est bornée ssi $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant \mathrm{M}$.

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour u accessible.

Supposons u bornée. N'importe quel M immodéré positif convient. En effet, pour n accessible, u_n est accessible donc modéré, et pour n inaccessible, u_n est modéré par hypothèse. Dans les deux cas, $|u_n| \leqslant \mathrm{M}$.

Réciproquement, supposons la formule. $(\mathrm{T}_\exists)$ permet de choisir M accessible. Pour tout n, inaccessible ou pas, $|u_n| \leqslant \mathrm{M}$ donc u_n est modéré. □

Le réel l est valeur d'adhérence de la suite réelle u ssi

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{N} \leqslant n \wedge |u_n - l| \leqslant \epsilon$$

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour u, l accessibles.

Supposons l valeur d'adhérence de u. Pour montrer la formule, $(\mathrm{T}_\forall)$ permet de supposer ϵ et N accessibles. Choisissons un n inaccessible pour lequel $u_n \simeq l$, en particulier $\mathrm{N} \leqslant n$ et $|u_n - l| \leqslant \epsilon$.

Réciproquement, supposons la formule. Choisissons un $\epsilon \simeq 0$ strictement positif et un N inaccessible. Elle fournit $n \geqslant \mathrm{N}$ pour lequel $|u_n - l| \leqslant \epsilon$. En particulier, n est inaccessible et $u_n \simeq l$. □

Une suite réelle u tend vers $+\infty$ ssi

$$\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R} \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{N} \leqslant n \implies \mathrm{A} < u_n$$

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour u accessible.

Supposons que u tend vers $+\infty$. Pour montrer la formule, $(\mathrm{T}_\forall)$ permet supposer A accessible. Choisissons un N inaccessible. Soit $n \geqslant \mathrm{N}$, n est inaccessible donc u_n immodéré positif et $\mathrm{A} < u_n$.

Réciproquement, supposons la formule. Soient n' inaccessible et A accessible. La formule appliquée à A garantit qu'à partir d'un certain rang N, $\mathrm{A} < u_n$. $(\mathrm{T}_\exists)$ permet de choisir N accessible. Dans ce cas, $\mathrm{N} \leqslant n'$ donc $\mathrm{A} < u_{n'}$. Comme A, n' sont quelconques, u tend vers $+\infty$. □

Une suite réelle u converge vers le réel l ssi

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}_*^+\quad \exists \mathrm{N}\in\mathbb{N}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{N}\leqslant n \implies |u_n-l|<\epsilon.$$

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour u,l accessibles.

Supposons que u converge vers l. Pour montrer la formule, $(\mathrm{T}_\forall)$ permet de supposer ϵ accessible. Choisissons un N inaccessible. Soit $n\geqslant \mathrm{N}$, n est inaccessible donc $u_n\simeq l$ et $|u_n-l|<\epsilon$.

Réciproquement, supposons la formule. Soient n' inaccessible et $\epsilon>0$ accessible. La formule appliquée à ϵ garantit qu'à partir d'un certain rang N, $|u_n-l|<\epsilon$. $(\mathrm{T}_\exists)$ permet de choisir N accessible. Dans ce cas, $\mathrm{N}\leqslant n'$ donc $|u_{n'}-l|<\epsilon$. Comme ϵ,n' sont quelconques, u converge vers l. □

Une suite réelle u vérifie le critère de Cauchy ssi

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}_+^*\quad \exists \mathrm{N}\in\mathbb{N}\quad \forall m\in\mathbb{N}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad (\mathrm{N}\leqslant m\wedge \mathrm{N}\leqslant n)\implies |u_n-u_m|<\epsilon.$$

Ex. 45 — Faire la preuve.

A.2 Fonctions réelles continues

Si D est une partie de $\mathbb{R}$ et a un réel, a est adhérent à D ssi

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}_*^+\quad \exists x\in \mathrm{D}\quad |x-a|\leqslant\epsilon$$

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour a,D accessibles.

Supposons que a est adhérent à D. Pour montrer la formule, $(\mathrm{T}_\forall)$ permet de supposer ϵ accessible. Choisissons un $x\simeq a$ dans D, $|x-a|<\epsilon$.

Réciproquement, supposons la formule. Soit $\epsilon\simeq 0$ strictement positif, la formule appliquée à ϵ garantit un $x\in\mathrm{D}$ tel que $|x-a|\simeq<\epsilon$ donc $\simeq 0$. □

Soit f une fonction réelle définie sur D.

— f est bornée ssi $\exists \mathrm{M}\in\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathrm{D}\quad |f(x)|\leqslant \mathrm{M}$.

— f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a ssi

$$\forall \mathrm{A}\in\mathbb{R}\quad \exists\eta\in\mathbb{R}_*^+\quad \forall x\in\mathrm{D}\quad |x-a|\leqslant\eta \implies \mathrm{A}<f(x)$$

— f converge vers l quand $x\to a$ ssi

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}_+^*\quad \exists\eta\in\mathbb{R}_+^*\quad \forall x'\in\mathrm{D}\quad |x'-a|\leqslant\eta \implies |f(x')-l|\leqslant\epsilon$$

— uniformément continue ssi

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}_+^*\quad \exists\eta\in\mathbb{R}_+^*\quad \forall x\in\mathrm{D}\quad \forall x'\in\mathrm{D}\quad |x'-x|\leqslant\eta \implies |f(x')-f(x)|\leqslant\epsilon$$

Les preuves sont, dans le principe, respectivement les mêmes que pour les suites bornées, tendant vers $+\infty$, convergentes et de Cauchy. La définition de la continuité à partir de la convergence, de la continuïté sur un intervalle sont internes et coïncident par transfert avec leur variante classique.

A.3 Intégration

Une fonction réelle f définie sur un intervalle réel I est réglée ssi

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_*^+ \quad \forall \mathrm{K} \text{ segment } \subseteq \mathrm{I} \quad \exists g \text{ étagée} \quad \forall x \in \mathrm{K} \quad |f(x) - g(x)| \leqslant \epsilon$$

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour f, I donc ses bornes accessibles.

Supposons f réglée. Pour montrer la formule, $(\mathrm{T}_\forall)$ permet de supposer ϵ et K accessibles. Prenons pour g une fonction étagée fournie par la définition de f. Soit $x \in \mathrm{K}$, le raisonnement mené au début de la section 8.2 montre que la partie accessible de x est dans K donc dans I. Par conséquent, $f(x) \simeq g(x)$, en particulier $|f(x) - g(x)| \leqslant \epsilon$.

Réciproquement, supposons la formule. Choisissons un $\epsilon \simeq 0$ strictement positif, K avec pour borne supérieure

— b si b réel $\in \mathrm{I}$;

— $b - \epsilon$ si b réel $\notin \mathrm{I}$;

— $-1/\epsilon$ si $b = +\infty$,

et une borne inférieure choisie de même. Ainsi, tout x très proche d'un accessible de I appartient à K. La formule fournit une fonction étagée g telle que pour de tels x, $|f(x) - g(x)| \leqslant \epsilon$, en particulier $f(x) \simeq g(x)$. □

Pour l'intégrale sur un segment, la construction montre en particulier que la suite de sommes de Riemann $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ converge vers $\int_a^b f$ pour f accessible, donc en général. L'intégrale construite est bien la même que d'habitude.

La notion de proximité dans $\mathbb{R}^2$ correspond à la distance usuelle dans $\mathbb{C}$.

A.4 Topologie

Il ne sera plus explicitement précisé que les preuves sont faites pour des accessibles et valables en général.

La topologie $\mathcal{O}$ sur l'espace E est compacte ssi

$$\forall \mathrm{R} \in \mathcal{O}^{\mathrm{E}} \quad (\forall t \in \mathrm{E} \quad t \in \mathrm{R}(t)) \implies (\exists \mathrm{A} \text{ fini} \subseteq \mathrm{E} \quad \forall x \in \mathrm{E} \quad \exists a \in \mathrm{A} \quad x \in \mathrm{R}(a))$$

Démonstration. Supposons $\mathcal{O}$ compacte. Pour prouver la formule, $(\mathrm{T}_\forall)$ permet de supposer le recouvrement R accessible. Tout x admet un voisin accessible a. L'ouvert $\mathrm{R}(a)$ est accessible comme R et a, donc contient x qui est voisin de a. Ainsi, $\forall x \quad \exists a^{\mathrm{ac}} \quad x \in \mathrm{R}(a)$. D'après $(\mathrm{I}^\forall)$, $\exists \mathrm{A}^{\mathrm{ac}}$ fini $\quad \forall x \quad \exists a \in \mathrm{A} \quad x \in \mathrm{R}(a)$.

Réciproquement, supposons la formule. D'après le lemme 11.2, chaque élément t appartient à un ouvert $\mathrm{R}(t)$ formé de voisins de t. D'après la formule, il existe une partie A finie accessible telle que tout x appartienne à un des $\mathrm{R}(a)$, et en particulier soit voisin de a. D'après le théorème 2.4, ce a est accessible. □

La topologie $\mathcal{O}$ sur l'espace E est séparée ssi

$$\forall a_1 \in \mathrm{E} \quad \forall a_2 \in \mathrm{E} \quad a_1 \neq a_2 \implies \exists \mathrm{O}_1 \in \mathcal{O}_{a_1} \quad \exists \mathrm{O}_2 \in \mathcal{O}_{a_2} \quad \mathrm{O}_1 \cap \mathrm{O}_2 = \{\}$$

Démonstration. Le fait que $\approx$ soit séparée se traduit aussi par le fait que deux accessibles distincts n'ont aucun voisin commun.

Supposons $\mathcal{O}$ séparée. Pour montrer la formule, $(\mathrm{T}_\forall)$ permet de supposer a_1, a_2 accessibles. Le lemme 11.2 fournit des ouverts $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$ contenant a_1, a_2 et seulement des éléments qui leur sont voisins. Comme a_1, a_2 sont accessibles, ils n'ont aucun voisin commun, $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$ sont disjoints.

Réciproquement, supposons la formule et $a_1 \neq a_2$ accessibles. La formule fournit des ouvert $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$ disjoints contenant respectivement a_1, a_2. D'après $(\mathrm{T}_\exists)$, on peut les supposer accessibles. Un voisin commun devrait appartenir aux deux ouverts, il n'y en a donc pas. □

Une topologie $\mathcal{O}'$ est plus fine qu'une topologie $\mathcal{O}$ ssi $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$.

Démonstration. Supposons les deux topologies accessibles, et notons $\approx, \approx'$ les proximités correspondantes.

Supposons $\mathcal{O}'$ est plus fine que $\mathcal{O}$. Soient $\mathrm{O} \in \mathcal{O}$, a un élement accessible de O et $x \approx' a$. Comme $\mathcal{O}'$ est plus fine que $\mathcal{O}$, $x \approx a$. Comme $\mathrm{O} \in \mathcal{O}$, $x \in \mathrm{O}$. Comme x, a sont quelconques, $\mathrm{O} \in \mathcal{O}'$.

Réciproquement, supposons $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$. Par définition, si $x \approx' y$, alors pour tout $\mathrm{O} \in \mathcal{O}'$, $y \in \mathrm{O} \implies x \in \mathrm{O}$. C'est en particulier valable pour les $\mathrm{O} \in \mathcal{O}$ donc $x \approx y$. Ainsi, $x \approx' y \implies x \approx y$. □

Un élément l est valeur d'adhérence de la suite u ssi

$$\forall \mathrm{O} \in \mathcal{O}_l \quad \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{N} \leqslant n \wedge u_n \in \mathrm{O}$$

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour u, l accessibles.

Supposons que l est valeur d'adhérence de u. Pour montrer la formule, $(\mathrm{T}_\forall)$ permet de supposer O et N accessibles. Choisissons un n inaccessible pour lequel $u_n \simeq l$, en particulier $\mathrm{N} \leqslant n$ et $u_n \in \mathrm{O}$.

Réciproquement, supposons la formule. Le lemme 11.2 fournit un O formé de voisins de l. Choisissions un N inaccessible. La formule fournit $n \geqslant \mathrm{N}$ pour lequel $u_n \in \mathrm{O}$. En particulier, n est inaccessible et $u_n \simeq l$. □

Une suite u converge vers l ssi

$$\forall \mathrm{O} \in \mathcal{O}_l \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{N} \leqslant n \implies u_n \in \mathrm{O}$$

Ex. 46 — Adapter la preuve faite pour une suite réelle.

Une fonction réelle f est continue sur un espace topologique E ssi

$$\forall a \in \mathrm{E} \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \mathrm{O} \in \mathcal{O}_a \quad \forall x \in \mathrm{O} \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour f accessibles.

Supposons que f est continue. Pour montrer la formule, $(\mathrm{T}_\forall)$ permet de supposer a, ϵ accessibles. Le lemme 11.2 fournit un O formé de voisins de a. Pour tout $x \in \mathrm{O}$, $x \simeq a$ donc $f(x) \simeq f(a)$, et en particulier $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Réciproquement, supposons la formule. Soient a accessible, $\epsilon > 0$ très petit. Il existe un ouvert O accessible sur lequel $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, donc $f(x) \simeq f(a)$. Comme O est accessible, il contient tous les voisins de a. □

B Réduction d'une formule externe

B.1 Simplification de l'idéalisation

Les preuves d'équivalence entre les définitions externes et internes semblent répétitives, ce n'est nullement un hasard. Un procédé mécanique traduit une formule externe raisonnable en une forme interne équivalente. Les exemples qui suivent nécessitent une certaine aisance avec les prédicats du premier ordre. L'idée générale est d'amener les prédicats accessibles sur la gauche par idéalisation, ou une version de la standardisation rappelant l'axiome du choix, de manière à pouvoir les enlever par transfert.

L'idéalisation prend une forme simplifiée lorsque la propriété étudiée est une relation transitive pour laquelle toute paire possède un majorant. Dans ce cas, elle permet littéralement d'échanger les quantificateurs.

Par exemple, les formules suivantes sont équivalentes, pour $x, \omega \in \mathbb{R}$.

$$\exists \omega \quad \forall x^{\mathrm{ac}} \quad x < \omega$$

$$\forall \mathrm{X}^{\mathrm{ac}} \text{ finie} \quad \exists \omega \quad \forall x \in \mathrm{X} \quad x < \omega \qquad (\mathrm{I}^\exists)$$

$$\forall x^{\mathrm{ac}} \quad \exists \omega \quad x < \omega$$

$$\forall x \quad \exists \omega \quad x < \omega \qquad (\mathrm{T}_\forall)$$

La troisième ligne correspond au cas particulier de la deuxième où X ne contient qu'un élément. Réciproquement, un n convenant pour $\max \mathrm{X}$ conviendra pour tous les éléments de X, et sera accessible par transfert. Ainsi, l'existence d'un immodéré positif est juste une formulation externe du fait que tout nombre réel a un majorant strict.

L'exercice qui portait sur l'existence d'un multiple commun de tous les accessibles dans $\mathbb{N}^*$ repose sur le même principe. Pour être divisible par chaque élément d'un ensemble fini, il suffit d'être divisible par leur produit.

La preuve du lemme 11.2 constitue un autre bon exemple, basé sur la relation $O \in \mathcal{O}_x \wedge (X \in \mathcal{O}_x \implies O \subseteq X)$. Trouver un O qui vérifie cette relation pour un nombre fini de X revient à trouver un O qui la vérifie pour leur intersection.

Traduisons, comme exemple plus réaliste, le critère externe de convergence d'une suite réelle accessible vers une limite accessible. Pour ne pas alourdir, il est sous-entendu que $n, N \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $X \subseteq \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{lr}
\forall n \text{ inaccessible} \quad u_n \simeq l & \text{version externe} \\
\forall n \quad (\forall N^{\mathrm{ac}} \quad N \leqslant N) \implies (\forall \epsilon^{\mathrm{ac}} \quad |u_n - l| < \epsilon) & \text{explicitation des} \simeq \\
\forall \epsilon^{\mathrm{ac}} \quad \forall n \quad \exists N^{\mathrm{ac}} \quad N \leqslant n \implies |u_n - l| < \epsilon & \text{tautologie} \\
\forall \epsilon^{\mathrm{ac}} \quad \exists X^{\mathrm{ac}} \text{ fini} \quad \forall n \quad \exists N \in X \quad N \leqslant n \implies |u_n - l| < \epsilon & (\mathrm{I}^{\exists})
\end{array}
$$

Il est possible de se limiter au cas où X ne contient qu'un élément, puisque le n qui convient pour $\max X$ conviendra pour chaque élément de X.

$$
\begin{array}{lr}
\forall \epsilon^{\mathrm{ac}} \quad \exists N^{\mathrm{ac}} \quad \forall n \quad N \leqslant n \wedge |u_n - l| < \epsilon & \\
\forall \epsilon \quad \exists N \quad \forall n \quad N \leqslant n \wedge |u_n - l| < \epsilon & (\mathrm{T}_{\exists}) \text{ puis } (\mathrm{T}_{\forall})
\end{array}
$$

Ex. 47 — Traduire que l est valeur d'adhérence de u, les deux étant accessibles.

B.2 Version fonctionnelle de la standardisation

La standardisation permet, comme à la section 4 de construire une application accessible à partir d'une valeur accessible en chaque point accessible. Elle peut faire beaucoup mieux en fournissant une sorte de version accessible de l'axiome du choix, applicable même quand chaque x est associé à plusieurs y.

Théorème B.1. *Soient* X, Y *accessibles,* $A(x,y)$ *une propriété, interne ou pas. Alors*

$$
\begin{array}{lr}
\forall x^{ac} \in X \quad \exists y^{ac} \in Y \quad A(x,y) \iff \exists \tilde{y}^{ac} : X \to Y \quad \forall x^{ac} \in X \quad A(x, \tilde{y}(x)) & (\mathrm{S}^{\exists}) \\
\exists x^{ac} \in X \quad \forall y \in Y^{ac} \quad A(x,y) \iff \forall \tilde{y}^{ac} : X \to Y \quad \exists x^{ac} \in X \quad A(x, \tilde{y}(x)) & (\mathrm{S}^{\forall})
\end{array}
$$

Démonstration. Le second énoncé découle du premier en remplaçant A par sa négation et en contraposant.

Le sens réciproque du premier est trivial. Supposons que l'application accessible $\tilde{y}$ vérifie $A(x, \tilde{y}(x))$ pour tout x accessible. Soit x accessible, son image par l'application accessible $\tilde{y}$ est accessible et vérifie $A(x, \tilde{y}(x))$.

Le sens direct est nettement plus délicat. Supposons que pour tout x accessible, l'équation $A(x,y)$ possède une solution y.

Considérons pour commencer le cas particulier d'une propriété A interne à paramètres accessibles. Par hypothèse, pour chaque x accessible, l'équation

$A(x,y)$ possède une solution y. D'après ($T_\forall$), c'est vrai pour tout x. L'axiome du choix (le C de ZFC) dit justement qu'il existe alors une application $\tilde{y}$ telle que $A(x,\tilde{y}(x))$ soit toujours vraie. D'après ($T_\exists$), $\tilde{y}$ peut être choisie accessible. $A(x,\tilde{y}(x))$ sera en particulier vérifiée par les accessibles.

Passons maintenant au cas général, où A est externe ou à paramètres inaccessibles. Posons $G = {}^S\{(x,Y) \in X \times \mathcal{P}(E) \quad Y = {}^S\{y \quad A(x,y)\}\}$.

Soit x accessible. Par hypothèse l'équation $A(x,y)$ possède une solution accessible y. Ce y appartient à $Y = {}^S\{y \quad A(x,y)\}$, qui n'est donc pas vide. Comme (x,Y) est accessible et vérifie clairement la condition définissant G, il existe un Y non vide tel que $(x,y) \in G$.

En résumé, pour tout x accessible, l'équation $\exists Y \in G \quad (x,Y) \in G \wedge y \in Y$ possède une solution accessible y. Cette propriété étant interne à paramètre G accessible, on peut appliquer le cas particulier. Il existe donc une application accessible $\tilde{y}$ telle que $\exists Y \in G \quad (x,Y) \in G \wedge \tilde{y}(x) \in Y$ soit vérifiée pour n'importe quel accessible x. D'après ($T_\exists$), Y peut être choisie accessible, donc égale à ${}^S\{y \quad A(x,y)\}$. Comme $\tilde{y}(x)$ est l'image d'un accessible par une application accessible, il est accessible. Comme il appartient à Y, il vérifie l'équation $A(x,y)$. □

Traitons par exemple le critère de compacité d'une topologie accessible. Notons $\mathcal{R} = \{R\colon E \to \mathcal{O} \quad \forall t \in E \quad t \in R(t)\}$ l'ensemble (accessible) des recouvrements de E par des ouverts. Par commodité, omettons de préciser à chaque quantificateur que $x,y \in E$, $O \in \mathcal{O}$, $\tilde{O}\colon E \to \mathcal{O}$, $X \subseteq E$ et $R \in \mathcal{R}$. Les formules suivantes sont équivalentes à la compacité de E .

$$
\begin{array}{ll}
\forall y \quad \exists x^{ac} \quad x \approx y & \\
\forall y \quad \exists x^{ac} \quad \forall O^{ac} \quad x \in O \implies y \in O & \text{définition de } \approx \\
\forall y \quad \forall \tilde{O}^{ac} \quad \exists x^{ac} \quad x \in \tilde{O}(x) \implies y \in \tilde{O}(x) & (S^\forall)
\end{array}
$$

Pour les $\tilde{O}$ pour lesquels un certain $x \notin \tilde{O}(x)$, on peut supposer ce x accessible d'après ($T_\exists$), et l'implication est trivialement vérifiée. La condition ci-dessus est vérifiée par tous les $\tilde{O}$ ssi elle l'est par les recouvrements R.

$$
\begin{array}{ll}
\forall y \quad \forall R^{ac} \quad \exists x^{ac} \quad y \in R(x) & \\
\forall R^{ac} \quad \forall y \in E \quad \exists x^{ac} \quad y \in R(x) & \text{échange de } \forall \\
\forall R^{ac} \quad \exists X^{ac} \text{ fini} \quad \forall y \quad \exists x \quad y \in R(x) & (I^\exists) \\
\forall R \quad \exists X \text{ fini} \quad \forall y \quad \exists x \quad y \in R(x) & (T_\exists) \text{ puis } (T_\forall)
\end{array}
$$

C Solutions des exercices

Ex. 1 — $\neg(\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant 2)$ équivaut aux formules

$\neg(\forall n \quad n \in \mathbb{N} \implies n \geqslant 2)$	explicitation de la restriction
$\exists n \quad \neg(n \in \mathbb{N} \implies n \geqslant 2)$	négation d'un quantificateur
$\exists n \quad n \in \mathbb{N} \wedge \neg(n \geqslant 2)$	négation d'une implication
$\exists n \in \mathbb{N} \quad \neg(n \geqslant 2)$	abréviation par une restriction

Ex. 2 — Soit $x > 1$, dans ce cas $x > 3$, l'implication est vérifiée que x soit accessible ou non, donc P est vraie. Soit $x \leqslant 1$, dans ce cas P est fausse, que l'implication le soit ou non. Dans les deux cas, la valeur de vérité de P est la même que celle de $x > 1$.

Ex. 3 — Quel serait l'ensemble de départ ? $\mathcal{P}(E)$ existe pour tout E, mais aucun ensemble ne regroupe tous les E possibles. En contraignant les valeurs de E dans un ensemble donné, on peut contourner la difficulté, en construisant chaque fois une application différente avec un espace d'arrivée atroce. La notation $\mathcal{P}(E)$, qui suggère à tort une application, est en revanche universellement adoptée.

Ex. 4 —

1. Soit $E \neq \{\}$ accessible. L'équation $x \in E$, interne à paramètre E accessible, possède une solution. $(T_\exists)$ permet d'en choisir une accessible.
2. S'il était accessible, comme il ne contient aucun accessible, il serait vide d'après le point précédent.
3. Montrons $\forall x \in E \quad x \in A$, conjecture interne à paramètres accessibles E, A. $(T_\forall)$ permet de supposer x accessible. Par hypothèse, un tel $x \in A$.

Ex. 5 — L'équation interne $(n \in \mathbb{N}) \wedge (\exists d \in \mathbb{N} \quad n = 2d)$ possède une solution, disons 6, mais rien ne garantit, pour l'instant, que le $\mathbb{N}$ soit accessible.

Ex. 6 —

1. a) Il existe un accessible V′ vérifiant P(V′), c'est-à-dire vide.
   b) L'ensemble vide est accessible.
2. a) Si E est accessible, il existe un ensemble accessible dont les éléments sont exactement les parties de E.
   b) Si E est accessible, $\mathcal{P}(E)$ aussi.

Ex. 7 — Si m, n sont accessibles, leur somme est définie uniquement par une formule interne de paramètres accessibles m et n, qui explicite l'existence d'une bijection de m et n sur un troisième entier. Par transfert, elle est accessible.

Ex. 8 — Que k soit accessible ou pas, la formule interne $k \leqslant n$ permet de former l'ensemble $E = \{k \in \mathbb{N} \quad k \leqslant n\}$, fini de cardinal $k+1$.
Si k est accessible, E est défini de façon unique par une formule interne de paramètre accessible k. Par transfert, E est accessible.
Réciproquement, si E est accessible, $k = \operatorname{Card} E - 1$ l'est aussi par transfert.

Ex. 9 — 0 est accessible, c'est évidemment le plus petit.
À ce stade, rien ne garantit l'existence d'un inaccessible. Les ensembles pourraient être tous accessibles, vérifiant trivialement l'axiome $(T_\forall)$.
Même s'il existe un entier inaccessible, rien ne dit que les entiers inaccessibles forment une partie de $\mathbb{N}$, car être inaccessible est une propriété externe. Si jamais c'est tout de même le cas, cette partie non vide de $\mathbb{N}$ possèdera nécessairement un plus petit élément.

Ex. 10 — Choisissons un n inaccessible, soit $k > 0$ accessible, comme $1 \leqslant k \leqslant n$, k divise la factorielle de n.

Ex. 11 — La plus évidente, $\mathbb{N}$, est la seule accessible d'après le théorème 2.2.
Soit n inaccessible, la propriété interne $k \leqslant n$ permet de former $\{k \in \mathbb{N} \quad k \leqslant n\}$, qui contient tous les naturels accessibles. De même pour $n+1$.

Ex. 12 — S'il existait un ensemble des entiers inaccessibles, son complémentaire dans $\mathbb{N}$ contredirait le théorème 2.6.
S'il existait un plus petit naturel inaccessible n, tous les suivants seraient inaccessibles d'après le théorème 2.5. La propriété interne $n \leqslant k$ permettrait de former l'ensemble des inaccessibles.

Ex. 13 —
1. La partie A est bien formée par séparation d'une interne, et accessible par transfert. Les accessibles A, B contiennent les mêmes accessibles donc sont égaux.
2. Rien ne dit que A existe, voir la partie 1.3.2. Soit n accessible. $n \in B \iff \neg n^{\mathrm{ac}}$, ce qui est toujours faux. Les accessibles B et $\{\}$ contiennent les mêmes accessibles, donc sont égaux.
3. La partie A est bien formée, finie de cardinal k. La partie B est accessible

et ses éléments accessibles sont les entiers inférieurs à k.

— Si k est accessible, A aussi par transfert. Pour n accessible, $n \in \mathrm{B} \iff n < k \iff n \in \mathrm{A}$. Les accessibles A, B contiennent les mêmes accessibles, donc sont égaux.
— Si k est inaccessible, A aussi sinon son cardinal le serait par transfert. Pour n accessible, $n \in \mathrm{B} \iff n \leqslant k$, ce qui est toujours le cas. Les accessibles B, $\mathbb{N}$ contiennent les mêmes accessibles, donc sont égaux.

Ex. 14 — Posons $x = 2+1/n$, où n est un naturel inaccessible. Si x était accessible, $n = 1/(x-2)$ le serait aussi. Comme $|x| = x = 2+1/n \leqslant 3$, il est modéré.

Ex. 15 — Si $|x| \leqslant a$ un accessible, alors $-a$ l'est aussi et $-a \leqslant -|x| \leqslant x \leqslant |x| \leqslant a$. Réciproquement, si $a \leqslant x \leqslant b$ avec a, b accessibles, alors $m = \max(|a|, |b|)$ aussi et $-m \leqslant -|a| \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant |b| \leqslant m$ donc $|x| < m$.

Ex. 16 — $n + 1/2 > n$, donc immodéré si n est un naturel inaccessible.

Ex. 17 —
1. Une puissance est un produit de modérés tous égaux.
2. $z = (\Re z) + i \times (\Im z)$ est modéré par somme et produit.
3. $-m = (-1) \times m$ et $\overline{m} = (\Re m) + (-i) \times (\Im m)$.
4. Si $-x$ est modéré, alors $x = (-1) \times (-x)$ aussi. Contraposer.
5. Une somme prend le signe du terme le plus grand en valeur absolue.

Ex. 18 — Supposons qu'il existe a, a' des naturels accessibles tels que $|m| \leqslant a$ et $|m'| \leqslant a'$. Alors $|m + m'| \leqslant |m| + |m'| \leqslant a + a'$, accessible par transfert comme a, a'. Ainsi, $m + m'$ est modéré.
Notons $\mathrm{P}(n)$ la propriété « une somme de n modérés l'est aussi ». $\mathrm{P}(0)$ est vraie, car une somme vide vaut 0. Si un accessible n vérifie $\mathrm{P}(n)$, alors une somme de $n+1$ modérés s'écrit $\sum_1^{n+1} m_i = \sum_1^n m_i + m_{n+1}$, somme de deux modérés, donc modérée d'après le raisonnement précédent. Ainsi, $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie. D'après le théorème 2.7, $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tous les n accessibles.

Ex. 19 — Parler de structure algébrique revient à parier que la propriété externe définissant un modéré définit une partie de $\mathbb{Q}$, voir la partie 1.3.2.
Bon, ce n'est pas parce qu'on ne peut pas le construire par séparation qu'il

n'existe pas. S'il existait un ensemble M contenant exclusivement les complexes modérés, $M \cap \mathbb{N}$ contredirait le théorème 2.6.
Le standardisé $M' = {}^{S}\{x \in \mathbb{Q} \quad x \text{ est modéré}\}$ n'est guère plus intéressant. Un accessible étant toujours modéré, $M' = \mathbb{Q}$ d'après le théorème 2.2.

Ex. 20 —

1. Si $a \neq 0$ est accessible, alors $1/a$ aussi par transfert, en particulier $1/a$ est modéré, donc son inverse a n'est pas très proche de 0.
2. Cet ensemble et $\{0\}$ sont égaux d'après le théorème 2.2.

Ex. 21 — L'extension triviale à $x = 0$ n'est pas explicitée.

1. Si $1/x$ est immodéré, $1 < |1/x|$ donc $|x| < 1$.
2. Si $1/x$ est immodéré, alors $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\bar{x}} = \overline{\frac{1}{x}}$ et $\frac{1}{|x|} = \left|\frac{1}{x}\right|$ aussi.

Ex. 22 —

1. Soient $x, x' \simeq 0$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$ accessible. Alors $a/2$ aussi, et $|x + x'| \leqslant |x| + |x'| < a/2 + a/2 = a$.
2. Le raisonnement par récurrence traditionnel ne s'applique pas à la propriété externe « toute somme d'un nombre accessible n de termes très proches de zéro l'est aussi », mais le théorème 2.7 si.
   La propriété est trivialement vérifiée pour $n = 0$. La question précédente garantit, en regroupant les n premiers termes, qu'elle est héréditaire.
3. Soient n accessible et $x_1, \cdots, x_n \simeq 0$. Notons $|x_k| = \max\{|x_i| \quad 1 \leqslant n\}$, alors $|\sum x_i| \leqslant \sum |x_i| \leqslant n|x_k|$. Le membre de droite, produit d'un modéré par un $\simeq 0$, l'est aussi.
4. Soient n accessible, $x_1, \cdots, x_n \not\simeq 0$. En particulier, aucun x_i n'est nul, donc $1/\prod x_i = \prod 1/x_i$ existe. Il est modéré comme produit d'un nombre accessible de modérés, donc $\prod x_i \not\simeq 0$.
5. Notons $|x_k| = \min\{|x_i| \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Le fait que $x_k \not\simeq 0$ fournit un accessible $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a \leqslant |x_k|$. Alors $|\prod x_i| = \prod |x_i| \geqslant |x_k|^n \geqslant a^n$.
6. Un produit sans facteur $= 1 \not\simeq 0$. Si deux facteurs $x, x' \not\simeq 0$, alors il existe $a, a' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a \leqslant |x|$ et $a' \leqslant |x'|$, d'où $aa' \leqslant |xx'|$ et le produit $\not\simeq 0$.

Ex. 23 — (i)Si $x \simeq 0$, alors $x + \epsilon$, somme de deux $\simeq 0$, aussi donc $|x| \simeq 0 \simeq |x + \epsilon|$.
Si $x \not\simeq 0$, alors $|\epsilon| < |x|$ donc la somme $x + \epsilon$ est du signe $\pm$ de x. $|x + \epsilon| = \pm(x + \epsilon) = \pm x \pm \epsilon = |x| \pm \epsilon$. Or $\pm\epsilon \simeq 0$.

(ii)$(x + \epsilon_x) + (y + \epsilon_y) = (x + y) + (\epsilon_x + \epsilon_y)$. Or $\epsilon_x + \epsilon_y \simeq 0$.

(iii)$(x+\epsilon_x)(y+\epsilon_y) = xy + x\epsilon_y + y\epsilon_x + \epsilon_x\epsilon_y$. Chacun des trois derniers termes est de la forme modéré fois $\simeq 0$, donc $\simeq 0$. Le résultat sur la somme s'applique.

(iv)$\frac{1}{x+\epsilon} = \frac{1}{x} - \epsilon\frac{1}{x}\frac{1}{x+\epsilon}$. Comme $x \not\simeq 0$, $x+\epsilon$ non plus et leurs inverses sont modérés, Les résultats sur la somme et le produit s'appliquent.

Ex. 24 — 1. $-x' = (-1)\times x' \simeq \cdots$ rien ne dit que x est modéré.
$-(x+\epsilon) = -x-\epsilon \simeq -x+0 = -x$

2. $\overline{z+\epsilon} = \overline{z}+\overline{\epsilon}$. Comme $|\overline{\epsilon}| = |\epsilon|$, $\overline{\epsilon} \simeq 0$.
3. Supposons $x \simeq x'$ et $y \simeq y'$, alors $x+i\times y \simeq \cdots$ rien ne dit que y est modéré.
$(x+\epsilon_x)+i(y+\epsilon_y) = x+iy+\epsilon_x+i\epsilon_y \simeq x+iy+0+i0 = x+iy$
Réciproquement, si $z' \simeq z$, alors $\mathfrak{Re}\, z' = \frac{1}{2}(z'+\overline{z'}) \simeq \cdots$ rien ne dit que la parenthèse est modérée.
$\mathfrak{Re}(z+\epsilon) = \frac{1}{2}[(z+\epsilon)+\overline{z+\epsilon}] = \mathfrak{Re}\, z + \frac{1}{2}[\epsilon+\overline{\epsilon}] \simeq \mathfrak{Re}\, z + \frac{1}{2}[0+\overline{0}] = \mathfrak{Re}\, z$

Ex. 25 — Parler de relation d'équivalence revient à parier que la propriété externe $x \simeq y$ définit un graphe dans $\mathbb{C}^2$, voir la partie 1.3.2.
Deux accessibles x,y sont reliés ssi $x \simeq y$ ssi $x = y$. L'ensemble proposé est la diagonale de $\mathbb{C}^2$ d'après le théorème 2.2, et la relation obtenue est l'égalité.

Ex. 26 — Lorsque $x \simeq 0$ et $x > 0$, $C = \mathbb{Q}_-$ et $\max C = 0$. Lorsque $x = 0$, $C = \mathbb{Q}_-^*$ n'a pas de maximum, sinon $\frac{1}{2}\max C$ dépasserait $\max C$. Si x était immodéré, C ou son complémentaire ne contiendrait aucun rationnel, donc serait vide.

Ex. 27 — 1. Pour x,y accessibles, $|g(x)| \leqslant |x|$ reste modéré et $P \iff y = {}^{\circ}g(x)$.

2. Pour x,y accessibles, $y = f(x) \iff P \iff y \simeq g(x)$, bref pour x accessible $f(x) \simeq g(x)$. En particulier, $f(0) \simeq 0$, $f(1) \simeq 1/2$ et $f(-1) = (-1)^n/2$. Que n soit pair ou pas, $(-1)^n$ peut s'écrire sans paramètre inaccessible. Deux accessibles très proches étant égaux, ces approximations sont en fait des égalités.
3. Pour x accessible, $f(-x) \simeq g(-x) = (-1)^n g(x) \simeq (-1)^n f(x)$. Les extrémités sont accessibles donc égales, et le résultat s'étend par transfert.
4. Pour x accessible, $f(x) \simeq g(x) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{x}{x^{1-n}+1} \simeq x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.
5. Les valeurs sont égales seulement x vaut exactement $0, \pm 1$. Elles sont très proches dès que $|x| \not\simeq 1$, en dehors des trois cas précédents. La figure ci-

dessous illustre g en pointillés et f en trait continu.

Ex. 28 — 1. $\mathrm{e}(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

$$\leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 2 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 3$$

2. $\mathrm{e}(z) - 1 = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - 1^n = \frac{z}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^k$

   $\mathrm{e}(z) - 1 - z = \frac{z}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^k - 1 = \frac{z^2}{n^2} \sum_{0 \leqslant j < k < n} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^j$

3. $|\mathrm{e}(z) - 1 - z| \leqslant \frac{|z|^2}{n^2} \sum_{0 \leqslant j < k < n} \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^j \leqslant \frac{|z|^2}{n^2} \sum_{0 \leqslant j,k < n} \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n = |z|^2\, \mathrm{e}(|z|)$
4. Quand $z \simeq 0$, $|z| < 1$ donc $\mathrm{e}(|z|) \leqslant \mathrm{e}(1)$ est modéré. Le membre de droite de la formule précédente $\simeq 0$, donc $\mathrm{e}(z) = 1 + z + (\simeq 0) \simeq 1$.
5. $\left|\mathrm{e}(iy)\right|^2 = \left|1 + i\frac{y}{n}\right|^{2n} = \left|1 + \frac{y^2}{n^2}\right|^n = \mathrm{e}(\frac{y^2}{n}) \simeq 1$ donc $|\mathrm{e}(iy)| = 1 + \frac{|\mathrm{e}(iy)|^2 - 1}{|\mathrm{e}(iy)| + 1} \simeq 1$
6. $\frac{\mathrm{e}(z)\,\mathrm{e}(z')}{\mathrm{e}(z+z')} = \frac{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \left(1 + \frac{z'}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{z+z'}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{zz'/n^2}{1 + \frac{z+z'}{n}}\right)^n = e\left(\frac{zz'}{n + z + z'}\right) = \mathrm{e}(\simeq 0) \simeq 1$
7. On sait déjà que $\mathrm{e}(1)$ est modéré. Chaque fois que $\mathrm{e}(k)$ sera modéré et k accessible, $\mathrm{e}(k+1) = \mathrm{e}(k) \times \mathrm{e}(1)/$(très proche de 1) le sera aussi. D'après le théorème 2.7, $\mathrm{e}(k)$ est modéré pour tout k accessible.
8. Soit $a \in \mathbb{N}$ accessible tel que $|z| \leqslant a$, $|\mathrm{e}(z)| = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n \leqslant \mathrm{e}(|z|) \leqslant \mathrm{e}(a)$.

Ex. 29 — 1. Après avoir sorti de la somme tous les facteurs possibles, minorer chaque dénominateur restant par $m+1$ le plus petit d'entre eux fait apparaître une progression géométrique de raison $\epsilon = \frac{|z|}{m+1} \simeq 0$. L'indétermination $\frac{|z|^m}{m!}$ été levée pour z modéré et m inaccessible. Que $n - m + 1$ soit

accessible ou pas, la fraction de droite $\simeq 1$.
$$\sum_{m}^{n} \frac{|z|^k}{k!} \leqslant \frac{|z|^m}{m!} \sum_{m}^{n} \frac{|z|^{k-m}}{(m+1)\cdots k} \leqslant \frac{|z|^m}{m!} \sum_{m}^{n} \epsilon^{k-m} = \frac{|z|^m}{m!} \frac{1-\epsilon^{n-m+1}}{1-\epsilon} \simeq 0$$

2. Chaque facteur $1 - \frac{j}{n} \in [0,1]$, donc le produit aussi, donc le crochet aussi.
3. Soit n' un autre inaccessible, la construction mêne à $\exp' z \simeq \sum_{k=0}^{n'} \frac{z^k}{k!}$ pour z accessible. Quitte à permuter, supposons $n' < n$.
   $|\exp z - \exp' z| \simeq \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n'} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=n'+1}^{n} \frac{|z|^k}{k!}$. Le calcul de la première question, en remplaçant m par $n'+1$, montre que cette différence $\simeq 0$. Étant accessible, elle est nulle. L'égalité se généralise à tout z par ($T_\forall$).

Ex. 30 — Lorsque n est premier, $x \in S \iff x = 1$ pour tout x accessible, donc pour tout x par transfert. Lorsque n est une puissance de deux, S contient exactement les puissances de deux.

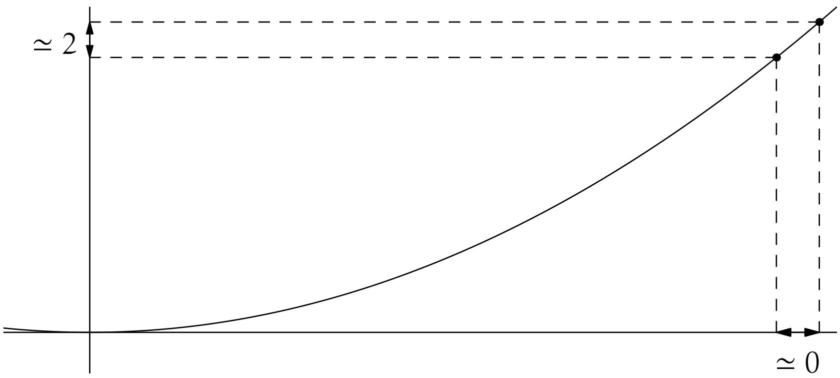
Ex. 31 — Soient u, u', l, l' accessibles, sans perte de généralité.
1. Supposons que u converge vers l, l'. Choisissons un n inaccessible, $l \simeq u_n \simeq l'$. Deux accessibles très proches sont égaux.
2. Soit n inaccessible, $u_n \simeq l$ est très proche d'un accessible donc modéré.
3. Soit n inaccessible, $u_n \simeq l$, $u'_n \simeq l'$ et l, l' sont modérés donc $u_n u'_n \simeq ll'$.

Ex. 32 — La suite nulle est accessible, et ses termes sont modérés.
Soient u, u' bornées et λ réel, montrons que $u + u', uu', \lambda u$ sont bornées. Il suffit de le vérifier pour u, u', λ accessibles. Les suites $u+u', uu', \lambda u$ le sont alors aussi. Soit n inaccessible, u_n, u'_n sont modérés. Comme λ est accessible, lui aussi, et les opérations sur les ordres de grandeur montrent que $u_n + u'_n, u_n u'_n, \lambda u_n$ aussi.

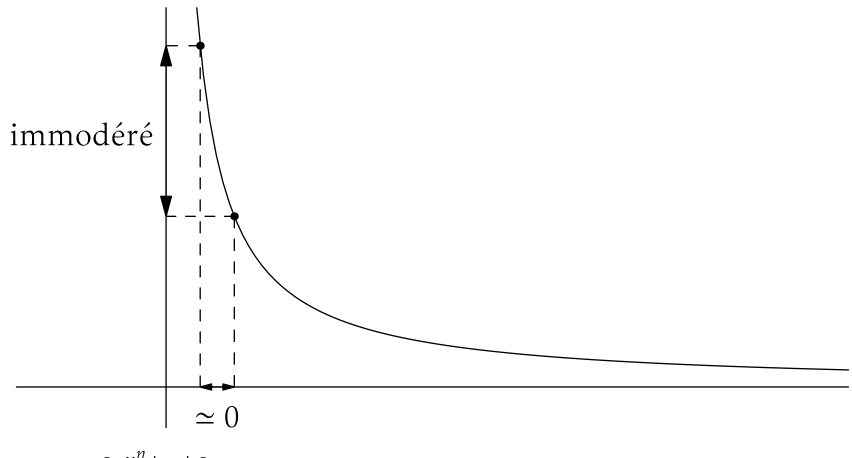
Ex. 33 —
1. L'identité est accessible et $f(x+\epsilon) = x + \epsilon = f(x) + \epsilon \simeq f(x)$.
2. Soit f une application constante, accessible sans perte de généralité. Ses valeurs sont égales, en particulier très proches.
3. Il suffit de vérifier qu'une combinaison à coefficients accessibles de fonctions accessibles reste dans l'espace, le cas de la constante nulle étant déjà réglé. Pour λ accessible donc modéré, $(\lambda f + g)(x+\epsilon) = \lambda f(x+\epsilon) + g(x+\epsilon) \simeq \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$, donc le résultat est uniformément continu. Si les applications sont seulement continues, le raisonnement est le même

en supposant en plus x accessible.

4. Il suffit de le vérifier pour des fonctions accessibles. Soient f,g deux applications continues accessibles, et a accessible. Alors $f(a)$ et $g(a)$ sont accessibles et en particulier modérés, donc $(fg)(a+\epsilon) = f(a+\epsilon)g(a+\epsilon) \simeq f(a)g(a) = (fg)(a)$, donc leur produit est uniformément continu.
5. Dès que x est modéré, $(x+\epsilon)^2 \simeq x^2$. La continuité sur $\mathbb{R}$ et la continuité uniforme sur $[-a,a]$ en découlent.
   En deux points très proches qui seraient aussi très proches d'un accessible, la continuité s'applique et montre que les images des trois sont très proches. Pour mettre en défaut la continuité uniforme, il faut regarder du côté des réels sans partie accessible, c'est-à-dire immodérés. Pour ω immodéré, $(\omega+\frac{1}{\omega})^2 = \omega^2 + 2 + \frac{1}{\omega^2} \simeq \omega^2 + 2 \not\simeq \omega^2$.



6. Dès que $x \not\simeq 0$, $\frac{1}{x+\epsilon} \simeq \frac{1}{x}$. La continuité sur $\mathbb{R}^*$ et la continuité uniforme sur $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$ en découlent. En revanche, $2\epsilon \simeq \epsilon$ ont des images qui diffèrent d'un immodéré.



7. Soit $f : x \mapsto \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}$ une fraction rationnelle sous forme irréductible. Si f est accessible, les deux degrés et tous les coefficients sont accessibles. Soient $x \simeq a$ dans le domaine de définition, avec a accessible. D'une part,

a et donc x sont modérés. D'autre part, $b_m a^m + \cdots + b_0$ est un accessible non nul, donc il n'est pas très proche de 0. Les règles de calcul sur $\simeq$ montrent alors que $f(x) \simeq f(a)$.

8. Tout repose sur le fait que $\exp \epsilon \simeq 1$ pour $\epsilon \simeq 0$. Montrons ce point. $|\epsilon| < 1$ donc par croissance $\exp|\epsilon| < \exp 1$, d'où $|\exp \epsilon - 1 - \epsilon| \leqslant |\epsilon|^2 \exp|\epsilon| \leqslant |\epsilon|^2 \exp 1 \simeq 0$, et en particulier $\exp \epsilon \simeq 1$.
   Dès que $x \leqslant a$ pour un accessible a, $\exp x \leqslant \exp a$ est modéré, donc $\exp(x + \epsilon) = \exp x \times \exp \epsilon \simeq \exp x$. La continuité et la continuité uniforme sur $]-\infty, a]$ en découlent.

Ex. 34 — 1. N'importe quelle subdivision est adaptée.

2. a) Soient f accessible uniformément continue sur $]a,b[$, et n un naturel inaccesible.
      — f est continue sur $[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$, donc possède un maximum m sur cet intervalle.
      — Par continuité uniforme, $f(x) \simeq f(a-\frac{1}{n})$ donc $\leqslant m+1$ pour tout $x \simeq a$, et de même pour $x \simeq b$.

      En bref, il existe un m tel que $f(x) \leqslant m$ pour tout x. Par transfert, m peut etre choisi accessible, et toutes les valeurs de f sont modérées.
   b) Soient f accessible uniformément continue sur $]a,b[$, et n un naturel inaccesible. Tous les $x \simeq a$ sont très proches entre eux. D'après la question précédente, ils sont modérés, et ont une partie commune. Il suffit de prendre ce nombre pour $f(a)$.
   c) Soit f c.p.m. accessible, et δ une subdivision adaptée, qu'on peut choisir accessible. Il est clair que f est bornée, puisque chacune des ses restrictions à un $]t, t+\delta t[$ l'est.

      Soit $t \in \delta$, d'après la question précédente, il existe une fonction f_t continue, donc réglée sur $[t, t+\delta t]$ et coïncidant avec f sur $]t, t+\delta t[$. Par transfert, on peut la choisir accessible, donc il existe une fonction étagée ϕ_t très proche de f_t.

      La fonction qui prend les mêmes valeurs que f en $t \in \delta$ et b, et les mêmes valeurs que ϕ_t sur $]t, t+\delta_t[$ est très proche de f.
3. Supposons f c.p.m. accessible et δ adaptée accessible. L'ajout d'un point, disons dans $]t_1, t_3[$. Par hypothèse, f est uniformément continue sur cet intervalle, donc $t \simeq t' \implies f(t) \simeq f(t')$, et ceci reste trivialement vrai sur tout sous-intervalle. Par transfert, e résultat se généralise à toute c.p.m. et toute subdivision en un énoncé interne. On raisonne ensuite par récurrence sur le cardinal de la subdivision.
4. La constante nulle est continue donc c.p.m. Soient deux fonctions f, g

c.p.m. accessibles, $\lambda \in \mathbb{R}$ accessible, δ_f, δ_g des subdivisions adaptées à f, g, qui peuvent être choisies accessibles. La réunion $\delta = \delta_f \cup \delta_g$ est alors adaptée à f et g. Sur chaque intervalle de δ, $t \simeq t' \implies f(t) \simeq f(t')$ et de même pour g. La règle sur la somme étend ce résultat à $f + g$. Comme f est réglée, elle ne prend que des valeurs modérées, et la règle sur le produit s'applique à λf.

Ex. 35 — Les constantes 0 et $1/n$ sont très proches sur $[0, n]$.

Ex. 36 —

1. La fonction ϕ qui prend la valeur $f(x_t)$ sur $[t, t+\delta t[$ et $f(b)$ en b est étagée. Comme f est uniformément continue et accessible, toutes ses valeurs sur un intervalle de largeur $\delta t \simeq 0$ sont très proches les unes des autres, donc $\phi \simeq f$.
2. Soient n naturel inaccessible et δ formée des $a + k\frac{b-a}{n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. $\int_a^b t\,dt \simeq \sum \frac{k}{n}\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}(na + \frac{n(n-1)}{2}\frac{b-a}{n}) \simeq \frac{b^2-a^2}{2}$ qui est accessible.
3. Supposons b accessible par transfert. Soient n naturel inaccessible et δ formée des $\exp\frac{kb}{n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
$\ln\exp b = \int_1^{\exp b} \frac{dt}{t} dt = \sum \exp\frac{-kb}{n}\left(\exp\frac{kb}{n} - \exp\frac{(k-1)b}{n}\right) = \sum 1 - \exp\frac{-b}{n}$
Comme $|\exp x - 1 - x| \leqslant x^2 \exp|x|$, $\left|\sum 1 - \exp\frac{-b}{n} + \frac{b}{n}\right| \leqslant n\frac{b^2}{n^2}\exp\frac{b}{n} \simeq 0$.
Finalement, $\ln\exp b \simeq b$, qui est accessible.

Ex. 37 —

1. Pour n accessible, la fonction accessible $[0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{n}{n+t}$ est continue donc réglée. Par transfert, cela reste vrai de f. De plus, $f(t) \simeq g(t)$ sur $[0,1]$, donc $\int_0^1 f(t)dt \simeq \int_0^1 g(t)dt = 1$.
2. Le même raisonnement montre que f est réglée, mais l'approximation $f(t) \simeq g(t)$ ne vaut que si $t \not\simeq 1$, et $t = 1$. Par exemple, $f(1 - \frac{1}{n}) \simeq \exp(-1)$.
3. Comme f est continue croissante, elle est doublement réglée. g est continue par le même raisonnement que ci-dessus. L'approximation $f(t) \simeq g(t)$ n'a été prouvée que pour t accessible, pas pour tout $t \in [0,1]$. En l'occurrence, on pourraît l'étendre aux inaccessibles, mais ce n'est pas direct.

Ex. 38 —

1. Soit (x, y). Comme x, y sont dans un pavé de bornes accessibles, ils sont modérés et ont des parties accessibles x_a, y_a telles que $x \simeq x_a$ et $y \simeq y_a$. En particulier, $(x_a, y_a) \in [a,b] \times [c,d]$. Par continuité en (x_a, y_a), $f(x,y) \simeq f(x_a, y_a)$. Un couple (x', y') très proche de (x, y) aura la même

partie accessible, donc aussi une image très proche de $f(x_a, y_a)$.

2. ($T_\forall$) permet de supposer y accessible. Alors $x \mapsto f(x,y)$ est une fonction accessible, vérifions la continuité uniforme à l'aide de $x' \simeq x$. Comme $(x', y) \simeq (x,y)$ et f uniformément continue, leurs images sont très proches.
3. Il s'agit du théorème 9.3 appliqué à la fonction continue $x \mapsto f(x,y)$ et à la fonction étagée définie par $g(t) = f(x,y)$ si $t \in [x, x+\delta x[$ et $g(b) = f(b,y)$. Elles sont $\simeq$ car $x \mapsto f(x,y)$ est uniformément continue et le pas $\simeq 0$.
4. Le critère de continuité uniforme s'applique à la fonction accessible $y \mapsto \int f(x,y)dx$. Soient $y' \simeq y$, alors $(x,y') \simeq (x,y)$ et par continuité uniforme de f leurs images aussi. D'après le théorème 9.3, $\int f(x,y')dx \simeq \int f(x,y)dx$.
5. Par une question précédente, $\forall y \quad \int f(x,y)dx \simeq \sum_{x\in\delta} f(x,y)\delta x$.
   D'après le théorème 9.3, $\int \left(\int f(x,y)dx\right))dy \simeq \int (\sum_{x\in\delta} f(x,y)\delta x)\,dy$.
   Par linéarité, $\simeq \sum_{x\in\delta}\left(\int f(x,y)dy\right)\delta x$.
   Par définition de l'intégrale, $\simeq \int\left(\int f(x,y)dy\right)dx$.
   Les deux extrémités sont accessibles, donc égales.

Ex. 39 — 1. La formule $\forall X^{ac}$ fini $\quad \exists y \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in X \cap \mathbb{N}^* \quad x \mid y$ est vérifiée en prenant par exemple pour y le produit des éléments de $X \cap \mathbb{N}^*$. Donc les naturels accessibles non nuls ont un multiple non nul commun y. Si ce y était accessible, $2y$ le serait aussi et on aurait $2y \mid y$.

2. La formule $\forall X^{ac}$ fini $\quad \exists y \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in X \cap \mathbb{N} \quad x < y$ est vérifiée en prenant par exemple pour y le maximum des éléments de $X \cap \mathbb{N}$ plus un. Donc les naturels accessibles ont un majorant strict commun y. Si ce y était accessible, $y+1$ le serait aussi et on aurait $y+1 < y$.
3. La formule $\forall X^{ac}$ fini $\quad \exists y$ fini $\quad \forall x \in X \quad x \in y$ est vérifiée en prenant par exemple $y = X$. Tous les accessibles appartiennent à un même ensemble fini y. Si ce y était accessible, il contiendrait tous les accessibles, donc tous les ensembles. Ce serait surprenant d'après le théorème 1.2. D'ailleurs, même s'il y avait un ensemble de tous les ensembles, il aurait du mal à être fini.

Ex. 40 — Dans la topologie grossière, $x \approx y$ est toujours vérifié, tout le monde est voisin de tout le monde. Dans la topologie discrète, $x \approx y$ équivaut à $x = y$, le seul voisin d'un élément lui-même.

Ex. 41 — 1. Supposons $x \approx y$ et soit V un voisinage accessible de y. Alors

$y \in O \subseteq V$ pour un ouvert O. Par transfert, O peut être supposé accessible. Comme $x \simeq y$, $x \in O \subseteq V$.

La réciproque découle du fait que tout ouvert O contenant y est en particulier un voisinage de y.

2. Dans ce cas, le transfert ne s'applique pas, et O peut être inaccessible. L'adhérence de $\mathring{V}$ de V est ouverte, vérifie $y \in O \subseteq \mathring{V} \subseteq V$, mais en plus elle est accessible comme V. Elle permet de finir la preuve.

Ex. 42 — Soit F une partie accessible, notons O son complémentaire, qui l'est aussi. Pour a accessible, les deux assertions « dès que a est dans O, tous ses voisins sont dans O » et « dès qu'un de ses voisins est dans F, a est dans F » sont contraposées. Ainsi, F est fermée ssi O est ouverte ssi la première est toujours vraie ssi la seconde est toujours vraie.

Ex. 43 — Si V est un voisinage de a, alors $O \subseteq V$ pour un $O \in \mathcal{O}_a$. ($T_\exists$) permet de choisir O accessible. Un voisin $\in$ O, donc $\in$ V. Réciproquement, si V contient tous les voisins de a, le lemme 11.2 fournit un ouvert O tel que $a \in O \subseteq V$, donc V est un voisinage de a.

Ex. 44 — Il suffit de le prouver pour une fonction accessible. Son domaine est alors accessible. Soient $x \simeq x'$ dans ce domaine, comme ils sont dans un compact, il existe un accessible a tel que $x \simeq a \simeq x'$. Par continuité, $f(x) \simeq f(a) \simeq f(x')$. Comme x, x' sont quelconques, f est uniformément continue.

Ex. 45 — Il suffit de faire la preuve pour u accessible.
Supposons que u vérifie le critère de Cauchy. Pour montrer la formule, ($T_\forall$) permet de supposer ϵ accessible. Choisissons un N inaccessible. Pour tous $n, m \geqslant$ N, n, m sont inaccessibles donc $u_n \simeq u_m$ et $|u_n - u_m| < \epsilon$.
Réciproquement, supposons la formule. Soient n', m' inaccessibles et $\epsilon > 0$ accessible. La formule appliquée à ϵ garantit qu'à partir d'un certain rang N, $|u_n - u_m| < \epsilon$. ($T_\exists$) permet de choisir N accessible. Dans ce cas, $N \leqslant m', n'$ donc $|u_{n'} - u_{m'}| < \epsilon$. Comme ϵ, n', m' sont quelconques, u vérifie le critère de Cauchy.

Ex. 46 — Il suffit de faire la preuve pour u et a accessibles.
Supposons que u converge vers l. Pour montrer la formule, ($T_\forall$) permet de supposer O accessible. Choisissons un N inaccessible. Soit $n \geqslant$ N, n est inaccessible

donc $u_n \approx l$ et $u_n \in \mathrm{O}$.
Réciproquement, supposons la formule. Soient n' inaccessible et O un ouvert accessible. La formule appliquée à O garantit qu'à partir d'un certain rang N, $u_n \in \mathrm{O}$. ($\mathrm{T}_\exists$) permet de choisir N accessible. Dans ce cas, $\mathrm{N} \leqslant n$ donc $u_n \in \mathrm{O}$. Comme O est quelconque, $u_n \approx l$.

Ex. 47 — Sous-entendons que $n, \mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ll}
\exists n \text{ inaccessible} \quad u_n \simeq l & \text{version externe} \\
\exists n \quad (\forall \mathrm{N}^{\mathrm{ac}} \quad \mathrm{N} \leqslant \mathrm{N}) \wedge (\forall \epsilon^{\mathrm{ac}} \quad |u_n - l| < \epsilon) & \text{explicitation des } \simeq \\
\exists n \quad \forall (\epsilon, \mathrm{N})^{\mathrm{ac}} \quad \mathrm{N} \leqslant n \wedge |u_n - l| < \epsilon & \text{tautologie} \\
\forall \mathrm{X}^{\mathrm{ac}} \text{ fini} \quad \exists n \quad \forall (\epsilon, \mathrm{N}) \in \mathrm{X} \quad \mathrm{N} \leqslant n \wedge |u_n - l| < \epsilon & (\mathrm{I}^\exists)
\end{array}$$

Il est possible de se limiter au cas où X ne contient qu'un élément, puisque le couple (accessible) qui convient pour le couple formé du plus petit de ses ϵ et du plus grand de ses N conviendra pour tous les couples de X.

$$\begin{array}{ll}
\forall (\epsilon, \mathrm{N})^{\mathrm{ac}} \quad \exists n \quad \mathrm{N} \leqslant n \wedge |u_n - l| < \epsilon & \\
\forall (\epsilon, \mathrm{N}) \quad \exists n \quad \mathrm{N} \leqslant n \wedge |u_n - l| < \epsilon & (\mathrm{T}_\forall)
\end{array}$$

Références

[Del95] André Deledicq. Teaching with infinitesimals. In Springer, editor, *Nonstandard Analysis in Practice*. Francine Diener et Marc Diener, 1995.

[Har89] Jacques Hartong. In *La mathématique non standard (Histoire, philosophie, dossier scientifique)*. Fondements des Sciences, éditions du CNRS, Paris, 1989.

[Mey96] R. Lutz A. Makhlouf E. Meyer. *Fondement pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur*. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 1996.

[Nel] Edward Nelson. Internal set theory. `http://www.math.princeton.edu/~nelson/books/1.pdf`.

[Nel77] Edward Nelson. Internal set theory : A new approach to nonstandard analysis (`http://www.math.princeton.edu/~nelson/papers/ist.pdf`). *Bull. Amer. Math. Soc*, 83 :1165–1198, 1977.

[Nel87] Edward Nelson. Radically elementary probability theory (`http://www.math.princeton.edu/~nelson/books/rept.pdf`). *Annals of Mathematics Studies*, 117, 1987.

[Rob66] Abraham Robinson. *Non-standard analysis*. North Holland Studies in Logic, North Holland, Amsterdam, 1966.

[Rob85] Alain Robert. *Analyse non standard*. Presses Polytechniques Romandes, 1985.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1987.

[Sar95] Tewfik Sari. General topology. In Springer, editor, *Nonstandard Analysis in Practice*. Francine Diener et Marc Diener, 1995.